Mémoire

sur les rapports qui existent entre le calcul des Résidus
et le calcul des limites,
et sur les avantages qu'offrent ces deux nouveaux calculs
dans la résolution
des équations algébriques ou transcendantes ;

Présenté à l'Académie des Sciences de Turin le 27 novembre 1831

par M. Augustin Cauchy
membre de l'Institut de France

Mémoire

Sur les rapports qui existent entre le calcul des Résidus et le calcul des limites, et sur les avantages qu'offrent ces deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes;

(présenté à l'Académie de Turin, dans la séance du 27 novembre 1831)

Soient r, p deux variables réelles, x, y deux fonctions réelles de r et p

$$z = x + y\sqrt{-1} \tag{1}$$

une variable imaginaire, et $f(z)$ une fonction réelle ou imaginaire de z. On pourra considérer x, y comme représentant un système de coordonnées planes, que, pour fixer les idées, nous supposerons rectangulaires, et r, p comme représentant un système d'autres coordonnées, par exemple, des coordonnées polaires. Cela posé, on aura évidemment

$$\frac{\partial\left\{f(z)\frac{\partial z}{\partial r}\right\}}{\partial p} = \frac{\partial\left\{f(z)\frac{\partial z}{\partial p}\right\}}{\partial r}. \tag{2}$$

Soit v la valeur commune des deux fonctions qui constituent les deux membres de l'équation précédente. Concevons d'ailleurs que, dans le plan des x, y, on trace un contour fermé 00'0''..., et que l'on détermine par la méthode généralement suivie dans le calcul infinitésimal, la valeur des intégrales doubles

$$\iint v\,dp\,dr, \tag{3}$$

$$\iint v\,dr\,dp \tag{4}$$

en supposant les intégrations étendues à tous les points renfermés dans ce contour, c'est-à-dire, à tous les systèmes de valeurs de r et p qui peuvent représenter des coordonnées de ces mêmes points. Dans l'intégrale (3), la première intégration, relative à p, devra être

effectuée entre des limites qui seront généralement fonctions de r, et la seconde intégration relative à r entre des limites constantes, tandis que dans l'intégrale (4) la première intégration relative à r devra s'effectuer entre des limites qui seront fonctions de p, et la seconde intégration relative à p entre des limites constantes. Or, comme la fonction v est tout à la fois une dérivée exacte relativement à p et relativement à r, il est clair que les intégrales doubles dont nous venons de transformer en des intégrales simples, dans chacune desquelles le coefficient de dx ou de dy sera ordinairement la différence entre deux valeurs particulières de la fonction

(5) $f(z)\frac{dz}{dr}$ ou (6) $f(z)\frac{dz}{dp}$,

réduites à n'être plus que des fonctions de la seule variable r ou p, et correspondantes à l'un des points situés sur le contour OO'O''... Ajoutons que les valeurs trouvées des intégrales (3) et (4) devront équivaloir entre elles, si la fonction v demeure finie et continue pour toutes les valeurs de r et de p comprises entre les limites des intégrations. Mais, si le contraire a lieu, la différence entre l'intégrale (4) et l'intégrale (3) sera une certaine expression Δ, dont la valeur pourra être déterminée soit par la théorie des intégrales singulières, soit à l'aide du calcul des Résidus.

Concevons, pour fixer les idées, que les fonctions x, y restent finies et continues pour tous les points renfermés dans le contour OO'O''..., l'équation

(7) $$\frac{1}{f(z)} = 0$$

admette des racines réelles ou imaginaires $z_1, z_2, \ldots z_m$ correspondantes à un ou plusieurs de ces mêmes points, mais que la fonction $f(z)$ obtienne, pour tous les autres points une valeur unique et déter-

-minée entre les limites des intégrations. Si d'ailleurs le binome

$$(4) \qquad \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial r}$$

conserve toujours une valeur positive, on aura *

$$\Delta = 2\pi\sqrt{-1}\ \mathcal{E}\left(\left(f(z)\right)\right),$$

le signe $\mathcal{E}$ s'étendant aux valeurs $z_1, z_2, \ldots z_m$ de la variable z. Si, pour

---

* En effet, z étant parmi les racines de l'équation (7) une de celles qui correspondent à un point renfermé dans le contour $OO'O''\ldots$, la partie de Δ correspondante à cette racine sera une intégrale définie singulière que l'on pourra réduire au produit

$$K\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha-\rho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)} - \frac{1}{\alpha+\rho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)}\right\}\partial\alpha,$$

K désignant le résidu partiel relatif à la racine que l'on considère, et $\rho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)$ la valeur correspondante du rapport

$$\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)}{\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial p} + \left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\sqrt{-1}}{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2}$$

Or en exprimant l'intégrale

$$\int\left\{\frac{1}{\alpha-\rho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)} - \frac{1}{\alpha+\rho(\cos\tau+\sqrt{-1}\sin\tau)}\right\}\partial\alpha$$

à l'aide de logarithmes, on reconnaîtra immédiatement que, prise entre les limites $-\infty$, $+\infty$, cette intégrale se réduit à

$$2\left\{1(\sqrt{-1}) - 1(-\sqrt{-1})\right\} = 2\pi\sqrt{-1},$$

ou bien à

$$-2\left\{1(\sqrt{-1}) - 1(-\sqrt{-1})\right\} = -2\pi\sqrt{-1},$$

suivant que la quantité $\rho\sin\tau$, ou, ce qui revient au même, la quantité

$$\rho\sin\tau.\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2\right\} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial r}$$

est positive ou négative.

ces valeurs ou pour quelques unes d'entre elles, le binôme (8) deviendrait négatif, il faudrait changer les signes des radicaux correspondants compris dans le second membre de l'équation (7).

Cependant la formule (9) doit pour déterminer Δ quand on connaît les racines $z_1, z_2, \dots z_m$, doit pour déterminer ces racines ou des fonctions de ces racines, au calculant directement les valeurs des intégrales définies que Δ renferme. Alors il convient de renverser la formule (9), et de l'écrire ainsi

$$\mathcal{E}(\!|\, f(z) \,|\!) = \frac{\Delta}{2\pi\sqrt{-1}}. \tag{10}$$

Si l'on veut obtenir seulement une limite supérieure au module de la somme représentée par

$$\mathcal{E}(\!|\, f(z) \,|\!),$$

il suffira d'observer 1° que, pour des substitutions convenables, on peut transformer les intégrales définies renfermées dans Δ, de manière qu'elles se trouvent toutes prises entre les mêmes limites, et par conséquent expriment Δ au moyen d'une seule intégrale définie; 2° que le module de cette dernière intégrale ne dépassera pas la différence entre les deux limites de l'intégration, multipliée par la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction sous le signe f.

Pour montrer une application de ces principes que nous venons d'établir, supposons d'abord

$$r = x, \qquad p = y,$$

et admettons que x, y étant des coordonnées rectangulaires, le contour $OO'O''$ se réduise au système de quatre droites représentées par les équations

$$x = x, \quad x = X, \quad y = y_0, \quad y = Y, \tag{11}$$

dans lesquelles x_0, X, y_0, Y désignent des quantités réelles assujet-

-tiés aux conditions

(12) $$x_0 < X, \qquad y_0 < Y.$$

On aura

(13) $$\mathop{\mathcal{E}}_{x_0}^{X}\mathop{\mathcal{E}}_{y_0}^{Y}\left(\left(f(z)\right)\right) = \frac{\Delta}{2\pi\sqrt{-1}},$$

et

(14) $$\Delta = -\int_{x_0}^{X}\left\{f(x+Y\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1})\right\}dx$$
$$+\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\left\{f(X+y\sqrt{-1}) - f(x_0+y\sqrt{-1})\right\}dy.$$

D'ailleurs, dans la formule (13), on peut sans inconvénient supposer x et y liés entre eux par l'équation

(15) $$\frac{y-y_0}{Y-y_0} = \frac{x-x_0}{X-x_0},$$

qui représente la droite menée du point (x_0, y_0) au point (X, Y), puisqu'alors aux valeurs extrêmes x_0, X de la variable x correspondront les valeurs extrêmes y_0, Y de la variable y. Cela posé, si l'on désigne par θ la valeur commune des deux rapports qui constituent les deux membres de l'équation (15), on trouvera

(16) $$\Delta = -(X-x_0)\int_0^1\left\{f\left(x_0(1-\theta)+\theta X+Y\sqrt{-1}\right) - f\left(x_0(1-\theta)+\theta X+y_0\sqrt{-1}\right)\right\}d\theta$$
$$+(Y-y_0)\sqrt{-1}\int_0^1\left\{f\left(X+(y_0(1-\theta)+\theta Y)\sqrt{-1}\right) - f\left(x_0+(y_0(1-\theta)+\theta y_0)\sqrt{-1}\right)\right\}d\theta.$$

Par conséquent le module de l'expression (16) sera inférieur à la plus grande valeur que puisse acquérir le module du produit

(17) $$\frac{1}{2\pi}\left\{\begin{array}{l}(Y-y_0)\left\{f\left(X+(y_0(1-\theta)+\theta Y)\sqrt{-1}\right) - f\left(x_0+(y_0(1-\theta)+\theta y_0)\sqrt{-1}\right)\right\}\\ +(X-x_0)\left\{f\left(x_0(1-\theta)+\theta X+Y\sqrt{-1}\right) - f\left(x_0(1-\theta)+\theta X+y_0\sqrt{-1}\right)\right\}\sqrt{-1}\end{array}\right\},$$

quand on y fait varier θ entre les limites $0, 1$; ou, ce qui revient au même, à la plus grande valeur que puisse acquérir le module du rapport

(18) $$\frac{(Y-y_0)\left\{f(X+y\sqrt{-1}) - f(x_0+y\sqrt{-1})\right\} + (X-x_0)\left\{f(x+Y\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1})\right\}\sqrt{-1}}{2\pi},$$

quand on y fait varier à entier les limites x_0, X, et y entre les limites y_0, Y, mais de manière à vérifier l'équation (15). Donc à plus forte raison le module de l'expression (17) sera inférieur au produit qu'on obtient en multipliant la quantité

(19) $$2(X-x_0) + 2(Y-y_0),$$

c'est à dire, la périmètre du rectangle auquel se réduit dans le cas précédent le contour $OO'O''\ldots$, pour le rayon $\frac{1}{2R}$ et par la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction $f(z)$ pour des points situés sur la périmètre dont il s'agit.

Concevons maintenant que le contour $OO'O''\ldots$ ne se réduise plus au système de quatre droites, et soit une courbe fermée quelconque. On devra, dans l'intégrale

(20) $$\int_{x_0}^{X} \left\{ f(x+Y\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1}) \right\} dx$$

que renferme l'équation (18), remplacer les constantes y_0, Y par des fonctions de x, ou même, si la courbe cesse d'être convexe, on devra remplacer la différence

$$f(x+Y\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1})$$

par la somme V de plusieurs intégrales de la forme

$$\int f'(z)\,dy$$

prises entre des limites convenables. Soit d'ailleurs P un point choisi arbitrairement dans l'intérieur de la courbe donnée, et s l'arc de cette courbe compté positivement à partir du point O dans un sens tel que, cet arc venant à croître, le rayon vecteur mené du point P à l'extrémité de l'arc ait dans le plan des x, y, un mouvement direct de rotation autour du point P. Nommons enfin c le périmètre entier de la courbe $OO'O''\ldots$, et supposons que, dans la fonction

$$f(z) = f(x+y\sqrt{-1}),$$

on remplacera x et y par leurs valeurs, relatives à un point quelconque de ce périmètre, exprimées en fonction de s. Comme l'ordonnée y de ce point ne pourra croître tant que son extrémité restera dans l'intérieur de la courbe, si $\frac{dx}{ds}$ est positif, et tant qu'elle en sortira, si $\frac{dx}{ds}$ est négatif, il est clair que l'élément $V\delta x$ de l'intégrale qui devra remplacer l'expression (20) sera la somme d'autant d'éléments de la forme

$$(24) \qquad -f(z)\frac{dx}{ds}\,ds$$

qu'il y aura de points situés sur le contour $OO'O''\ldots$ dans le prolongement de l'ordonnée que l'on considère. En conséquence, il faudra, dans l'équation (14), remplacer l'expression (20) par l'intégrale

$$(22) \qquad -\int_0^c f(z)\frac{dx}{ds}\,ds.$$

On prouvera de même que, dans l'hypothèse admise, on doit à l'expression

$$(23) \qquad \int_{y_0}^{Y}\Big\{f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})\Big\}\,dy$$

substituer l'intégrale

$$(24) \qquad \int^{c} f(z)\frac{dy}{ds}\,ds,$$

les coordonnées x, y étant toujours exprimées en fonction de s. Par suite, à la place de la formule (14), on obtiendra la suivante

$$(25) \qquad \Delta = \int_0^c f(z)\,\frac{dx+dy\sqrt{-1}}{ds}\,ds,$$

et l'équation (10) pourra être réduite à

$$(26) \qquad \mathcal{E}\big(\!\big(f(z)\big)\!\big) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c f(z)\frac{dz}{ds}\,ds.$$

Or, le module de l'expression imaginaire

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dx+dy\sqrt{-1}}{ds}$$

étant précisément l'unité, puisqu'on a généralement

(27) $$\frac{dx^2+dy^2}{dz^2} = 1,$$

il suit de la formule (25) que le module de Δ ne surpassera pas le produit $\frac{c}{2\pi}$ par le plus grande valeur que puisse acquérir le module de $f(z)$ correspondant à un point situé sur le contour $OO'O''\ldots$ Si l'on désigne cette plus grande valeur à l'aide de la lettre caractéristique Λ placée devant la fonction $f(z)$, et si l'on généralise ainsi l'emploi que nous avons fait de cette caractéristique dans un précédent mémoire, le module du résidu intégral

(26) $$\mathcal{E}(\!(f(z))\!)$$

ne surpassera pas

(29) $$\frac{c}{2\pi}\Lambda f(z).$$

Cela posé, nous énoncerons la proposition suivante.

1er Théorème. Soient x, y deux variables réelles, considérées comme représentant des coordonnées rectangulaires, $z = x + y\sqrt{-1}$ une variable imaginaire, $\mathcal{E}(\!(f(z))\!)$ le résidu intégral de $f(z)$ étendu à celles des racines de l'équation $//$ qui correspondent à des points renfermés dans un contour donné $OO'O''\ldots$, et c le périmètre de ce contour. La valeur exacte du résidu intégral

$$\mathcal{E}(\!(f(z))\!)$$

sera déterminée par l'équation (26), et le module de ce résidu aura pour limite supérieure le produit de $\frac{1}{2\pi}$ par le périmètre c, et par le plus grand des modules de $f(z)$ qui répondent à des points situés sur ce périmètre.

Il importe d'observer que les formules (25), (26) et le théorème 1er s'étendent au cas même où le contour $OO'O''\ldots$ serait formé par le système de plusieurs portions de lignes droites ou courbes. Ainsi, en particulier, le théorème 1er continue de subsister quand le contour $OO'O''\ldots$ est le périmètre d'un rectangle, ce qui s'accorde avec ce qu'on a dit plus haut.

Encore convient-il de préciser que, dans la formule (10) on pose

$$x = r\cos p, \qquad y = r\sin p.$$

Imaginons d'ailleurs que, r, p désignant des coordonnées polaires, le contour $OO'O''\ldots$ se réduise au système de deux droites et de deux arcs de cercle représentés par les équations

$$r = r_0, \quad r = R \quad ; \qquad p = p_0, \quad p = P \quad ; \tag{30}$$

r_0, R étant des quantités positives assujetties à la condition

$$r_0 < R, \tag{31}$$

et p_0, P étant choisis arbitrairement entre les limites $-\pi$, $+\pi$, de manière à remplir la condition

$$p_0 < P. \tag{32}$$

On aura

$$z = re^{p\sqrt{-1}}, \tag{33}$$

$$\int_{(r_0)(p_0)}^{(R)(P)} \{\!\{ f(z) \}\!\}\, z = \frac{\Delta}{2\pi\sqrt{-1}}, \tag{34}$$

et

$$\Delta = -\int_{r_0}^{R} \left\{ e^{P\sqrt{-1}} f(re^{P\sqrt{-1}}) - e^{p_0\sqrt{-1}} f(re^{p_0\sqrt{-1}}) \right\} dr$$
$$+ \sqrt{-1} \int_{p_0}^{P} \left\{ R f(Re^{p\sqrt{-1}}) - r_0 f(r_0 e^{p\sqrt{-1}}) \right\} e^{p\sqrt{-1}}\, dp. \tag{35}$$

Cela posé, en raisonnant comme ci-dessus, l'on prouvera que le module de l'expression (24) est inférieur à la plus grande des valeurs que reçoit le module du rapport

$$\frac{(P-p_0)e^{p\sqrt{-1}}\left\{R f(Re^{p\sqrt{-1}}) - r_0 f(r_0 e^{p\sqrt{-1}})\right\} + (R-r_0)\left\{e^{P\sqrt{-1}} f(re^{P\sqrt{-1}}) - e^{p_0\sqrt{-1}} f(re^{p_0\sqrt{-1}})\right\}\sqrt{-1}}{2\pi}, \tag{36}$$

quand on y fait varier r entre les limites r_0, R, et p entre les limites p_0, P, mais de manière à vérifier la condition

$$\frac{r-r_0}{R-r_0} = \frac{p-p_0}{P-p_0}. \tag{37}$$

Donc à plus forte raison le module de l'expression (34) sera inférieur au produit de $\frac{1}{2\pi}$ par le périmètre

(38) $$R(P-p_0) + r_0(P-p_0) + 2(R-r_0)$$

du contour $OO'O''$... et par la plus grande valeur $\Lambda f(z)$ que puisse acquérir le module de $f(z)$ pour des points situés sur ce même contour. Au reste cette conclusion pourrait être immédiatement déduite du théorème premier.

Si l'on prenait

(39) $$r_0 = 0, \quad p_0 = -\pi, \quad P = \pi,$$

l'expression (36) serait réduite à

(40) $$Re^{p\sqrt{-1}} f(Re^{p\sqrt{-1}})$$

et son module maximum à

(41) $$R\Lambda f(\bar{z}),$$

la valeur de $\bar{z}$ étant

(42) $$\bar{z} = Re^{p\sqrt{-1}}.$$

Donc le module du résidu intégral

(43) $$\overset{(R)}{\underset{(0)}{\mathcal{E}}}\overset{(\pi)}{\underset{(-\pi)}{\mathcal{E}}} \left(\!\left(f(z) \right)\!\right)$$

a pour limite supérieure le produit (43), ce qui s'accorde avec le théorème 1er, et avec les propositions établies dans le précédent mémoire.

Il est bon d'observer qu'on pourrait aisément déduire de la formule (25) les formules (14), (35) et autres du même genre. En effet, pour y parvenir, il suffirait de partager l'intégrale que renferme la formule (25) en plusieurs parties correspondantes aux diverses portions de lignes droites ou courbes dont se compose le contour $OO'O''$..., puis de transformer chaque intégrale particulière en substituant à la variable s l'une des variables x, y, r, p, etc.....

Supposons maintenant que les fonctions $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$ étant finies et continues pour toutes les valeurs de z correspondantes à des points situés

Dans le contour $OO'O''\ldots$, on prenne

$$(44)\qquad f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}\,F(z).$$

L'équation (7) sera réduite à

$$(45)\qquad f(z) = 0,$$

et, si, parmi les racines de l'équation (45), celles qui correspondent à des points renfermés dans le contour $OO'O''\ldots$ sont désignées par

$$z_1, z_2, \ldots z_m,$$

on aura

$$(46)\qquad F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m) = \mathcal{E}\left(\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\,F(z)\right)\right),$$

puis on en conclura, eu égard à la formule (26),

$$(47)\qquad F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c \frac{f'(z)}{f(z)}\,F(z)\,\frac{\partial z}{\partial s}\,\partial s.$$

De plus, en vertu du théorème premier, la somme

$$F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m),$$

déterminée par l'équation (46), aura pour limite supérieure la quantité

$$(48)\qquad \frac{c}{2\pi}\,\Lambda\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\,F(z)\right).$$

Si l'on prend $F(z) = 1$, la formule (47) donnera

$$(49)\qquad m = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c \frac{f'(z)}{f(z)}\,\frac{\partial z}{\partial s}\,\partial s,$$

et l'expression (48) deviendra

$$(50)\qquad \frac{c}{2\pi}\,\Lambda\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

Si l'on prend au contraire $F(z) = z$, la formule (47) donnera

$$(51)\qquad z_1 + z_2 + \ldots + z_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,\frac{\partial z}{\partial s}\,\partial s,$$

et l'expression (48) deviendra

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} \Lambda \left(z \frac{F'(z)}{F(z)} \right). \tag{52}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

1er Théorème. Soient x, y deux variables réelles,

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

une variable imaginaire, et

$$f(z), \quad F(z)$$

des fonctions réelles ou imaginaires de z, qui restent finies et continues, ainsi que la dérivée $F'(z)$, pour tous les systèmes de valeurs de x, y, propres à représenter les coordonnées rectangulaires des points situés dans un contour fermé $OO'O''\ldots$ soit C l'un

$$z_1, z_2, \ldots z_m$$

celles des racines de l'équation

$$f(z) = 0,$$

qui correspondent à de pareilles valeurs des variables x, y; et C le périmètre du contour $OO'O''\ldots$ de sorte que m de ces racines aient leur somme

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_m,$$

et la somme

$$F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m)$$

des fonctions semblables $F(z_1), F(z_2), \ldots F(z_m)$, autres que zéro pour valeurs inégales des seconds membres des équations (49), (51), (47), et pour modules très nombreux inférieurs aux trois quantités (50), (52), (48), la lettre Λ indiquant le plus grand module que puisse acquérir une fonction de z pour des points situés sur le contour $OO'O''\ldots$.

Concevons maintenant que les variables x, y et par suite la variable z étant exprimées en fonction de s, on ait

$$f(z) = \varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s), \tag{53}$$

$\varphi(s)$, $\chi(s)$ désignant deux fonctions réelles de la variable s. On trouvera par suite

$$\mathfrak{L}'(z)\frac{\partial z}{\partial s} = \varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s), \tag{54}$$

et la formule (49) donnera

$$m = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c \frac{\varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)}\, ds. \tag{55}$$

Or il sera généralement facile de déterminer exactement la valeur de l'intégrale

$$\int_0^c \frac{\varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)}\, ds. \tag{56}$$

Pour y parvenir, considérons d'abord une partie de cette intégrale, par exemple celle qui est relative à des valeurs de s renfermées entre les limites

$$s = s_0, \quad s = s_1,$$

s_0 étant $< s_1$, et $s_1 < c$. Si la fonction $\varphi(s)$ ne change pas de signe entre les limites

$$s = s_0, \quad s = s_1,$$

on aura

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)}\, ds = \lambda\{\varphi(s_1) + \sqrt{-1}\,\chi(s_1)\} - \lambda\{\varphi(s_0) + \sqrt{-1}\,\chi(s_0)\}, \tag{57}$$

ou bien

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)}\, ds = \lambda\{-\varphi(s_1) - \sqrt{-1}\,\chi(s_1)\} - \lambda\{-\varphi(s_0) - \sqrt{-1}\,\chi(s_0)\}, \tag{58}$$

suivant que $\varphi(s_0)$, $\varphi(s_1)$ sont positifs ou négatifs, c'est-à-dire que l'on aura dans l'un ou l'autre cas

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)}\, ds = \lambda\left\{\frac{\varphi(s_1)}{\varphi(s_0)}\right\} + \lambda\left\{1 - \frac{\chi(s_1)}{\varphi(s_1)}\sqrt{-1}\right\} - \lambda\left\{1 - \frac{\chi(s_0)}{\varphi(s_0)}\sqrt{-1}\right\}. \tag{59}$$

D'ailleurs le contour "... étant fermé par hypothèse, les variables réelles x, y, par conséquent aussi la variable imaginaire z, et la fonction $\mathfrak{L}z$ reprendront pour $s = c$ les mêmes valeurs que pour $s = 0$, autrement dit on aura généralement

$$\varphi(0) + \sqrt{-1}\,\chi(0) = \varphi(c) + \sqrt{-1}\,\chi(c)$$

$$\varphi(0) = \varphi(c), \qquad \chi(0) = \chi(c).$$

Donc si la fonction $\varphi(s)$ qui représente la partie réelle de $L(z)$ ne change pas de signe entre les limites $s=0$, $s=c$, la formule (59) donnera

$$\int_0^c \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = 0, \tag{60}$$

et l'on aura par suite

$$m = 0.$$

D'ailleurs $L(z)$ étant fonction continue de z, $\varphi(s)$ ne pourra changer de signe entre les limites $s=0$, $s=c$, sans s'annuler dans l'intervalle. Donc le nombre m s'évanouira, lorsque l'équation

$$\varphi(s) = 0 \tag{61}$$

n'admettra point de racines réelles.

Concevons à présent que l'équation (61) admette des racines réelles. Supposons d'ailleurs l'intervalle des limites s_0, s_1 assez petit, pour que la fonction $\varphi(s)$ s'évanouisse une seule fois dans cet intervalle, et nommons ς la valeur de s qui, étant comprise entre s_0 et s_1, coïncide avec une racine réelle simple ou avec plusieurs racines réelles égales de l'équation (61). Alors, en désignant par ε un nombre très-petit, on trouvera

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \int_{s_0}^{\varsigma-\varepsilon} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds + \int_{\varsigma+\varepsilon}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds \tag{62}$$

puis on en conclura

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = 1\left\{\varphi(s_1)+\sqrt{-1}\,\chi(s_1)\right\} - 1\left\{\varphi(s_0)+\sqrt{-1}\,\chi(s_0)\right\}$$
$$- 1\left\{\varphi(\varsigma+\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma+\varepsilon)\right\} + 1\left\{\varphi(\varsigma-\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma-\varepsilon)\right\},$$

si la fonction $\varphi(s)$ passe du négatif au positif, et

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = 1\left\{\varphi(s_1)+\sqrt{-1}\,\chi(s_1)\right\} - 1\left\{\varphi(s_0)+\sqrt{-1}\,\chi(s_0)\right\}$$
$$- 1\left\{\varphi(\varsigma+\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma+\varepsilon)\right\} + 1\left\{\varphi(\varsigma-\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma-\varepsilon)\right\},$$

3

si la fonction $\varphi(s)$ passe du positif au négatif. On trouvera au contraire

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \frac{1}{2}\left\{\varphi(s_1)+\sqrt{-1}\,\chi(s_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{\varphi(s_0)+\sqrt{-1}\,\chi(s_0)\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\varphi(s+\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(s+\varepsilon)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\varphi(s-\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(s-\varepsilon)\right\},$$

si la fonction $\varphi(s)$ est constamment positive ou nulle entre les limites s_0, s_1, et

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \frac{1}{2}\left\{-\varphi(s_1)-\sqrt{-1}\,\chi(s_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{-\varphi(s_0)-\sqrt{-1}\,\chi(s_0)\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\left\{-\varphi(s+\varepsilon)-\sqrt{-1}\,\chi(s+\varepsilon)\right\} + \frac{1}{2}\left\{-\varphi(s-\varepsilon)-\sqrt{-1}\,\chi(s-\varepsilon)\right\},$$

si la fonction $\varphi(s)$ est constamment positive ou nulle entre les mêmes limites. Cela posé, nommons Σ la partie réelle de l'intégrale

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds$$

qui renferme le nombre ε. Soient α_0, α_1 les valeurs de α correspondantes aux valeurs s_0, s_1 de la variable s. Nous aurons généralement

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \frac{1}{2}\left\{\pm f(\alpha_1)\right\} - \frac{1}{2}\left\{\pm f(\alpha_0)\right\} + \Sigma, \tag{63}$$

et

$$\Sigma = \frac{1}{2}\left\{\pm\left(\varphi(s-\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(s-\varepsilon)\right)\right\} - \frac{1}{2}\left\{\pm\left(\varphi(s+\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(s+\varepsilon)\right)\right\}, \tag{64}$$

chacun des doubles signes que renferment les logarithmes devant être réduit au signe + ou au signe −, et cette réduction devant être effectuée de telle manière que la partie réelle de l'expression affectée du double signe devienne positive. Sous cette condition, la formule (64) pourra être réduite à

$$\Sigma = \frac{1}{2}\left\{1+\frac{\chi(s-\varepsilon)}{\varphi(s-\varepsilon)}\sqrt{-1}\right\} - \frac{1}{2}\left\{1+\frac{\chi(s+\varepsilon)}{\varphi(s+\varepsilon)}\sqrt{-1}\right\}. \tag{65}$$

Or il résulte de cette formule que Σ s'évanouira, si, la variable s étant commune à l'équation (64) et à la suivante

(65) $$\chi(s) = 0,$$

la valeur du rapport

(67) $$\frac{\chi(s)}{\varphi(s)}$$

correspondante à $s = s_1$ est nulle ou seulement finie. Si cette valeur devenait infinie, ce qui arrivera, par exemple, lorsque $s = s_1$ n'est pas racine de l'équation (66), et, si le rapport (67) ne changeait pas de signe en passant par l'infini, s_1 s'évanouirait encore. Mais, si, en passant par l'infini le rapport (67) changeait de signe, on tirerait de la formule (68)

(68) $$\Sigma = \Delta(-\sqrt{-1}) - \Delta(\sqrt{-1}) = -\pi\sqrt{-1},$$

ou bien

(69) $$\Sigma = \Delta(\sqrt{-1}) - \Delta(-\sqrt{-1}) = \pi\sqrt{-1},$$

suivant que ce même rapport passera du négatif au positif ou du positif au négatif.

Supposons maintenant que la fonction $\varphi(s)$ s'évanouisse plusieurs fois entre les limites $s = s_0$, $s = s_1$. Alors, en procédant comme nous venons de le faire, on déduira de la formule

(70) $$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \Delta\left[\pm f(s_1)\right] - \Delta\left[\pm f(s_0)\right] + \pi(m'' - m')\sqrt{-1},$$

m', m'' étant des nombres entiers qui indiquent le premier combien de fois le rapport (67) passe, en devenant infini, du négatif au positif, le second combien de fois ce rapport passe, en devenant infini, du positif au négatif.

On pourrait encore évidemment à la formule (70) substituer la suivante

(71) $$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \Delta\,\frac{\sqrt{(\varphi(s_1))^2}}{\sqrt{(\varphi(s_0))^2}} + \Delta\left\{1 + \frac{\chi(s_1)}{\varphi(s_1)}\sqrt{-1}\right\} - \Delta\left\{1 + \frac{\chi(s_0)}{\varphi(s_0)}\sqrt{-1}\right\}$$
$$+ \pi(m'' - m')\sqrt{-1}.$$

Lorsqu'on prend

$$s_0 = 0, \quad s_1 = c,$$

on a

$$\mathfrak{L}(s_1) = \mathfrak{L}(s_0).$$

Par suite la formule (70) donne simplement

$$\int_0^c \frac{\varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \pi\,(m'' - m')\sqrt{-1}, \tag{72}$$

et la valeur de m, déterminée par l'équation (68), se réduit à

$$m = \frac{m'' - m'}{2}. \tag{73}$$

Il est bon d'observer ici que, si l'on fait, pour abréger,

$$-\frac{\varphi(s)}{\chi(s)} = f(s), \tag{74}$$

la valeur de $\mathfrak{L}s$, déterminée par l'équation (68), sera toujours le produit de l'expression imaginaire

$$\pi\sqrt{-1} \tag{75}$$

par la demi-différence

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{f(s+\varepsilon)}{\sqrt{(f(s+\varepsilon))^2}} - \frac{f(s-\varepsilon)}{\sqrt{(f(s-\varepsilon))^2}}\right\}, \tag{76}$$

ε étant un nombre infiniment petit; et que l'expression (76) ne diffère de zéro que dans le cas où l'on prend pour s une valeur de s propre à rendre la fonction $f(s)$ infinie, c'est-à-dire, dans le cas où l'on prend pour s une racine réelle de l'équation

$$\frac{1}{f(s)} = 0, \tag{77}$$

et qu'alors cette expression se réduit toujours à l'une des trois quantités -1, 0, $+1$. Or, s étant une variable réelle, et $f(s)$ une fonction réelle de s, la valeur de l'expression (76) correspondante

à une racine réelle γ de l'équation (77), nous appellerons désormais l'indice de la fonction relatif à cette racine. Nous nommerons indice intégral de la fonction la somme des indices relatifs aux différentes valeurs de s qui rendent la fonction infinie, et nous indiquerons cette somme, en plaçant la lettre caractéristique I devant la fonction entourée de doubles parenthèses, ainsi qu'il suit

$$I((f(s))) \tag{78}$$

Si la fonction se présente sous la forme d'une fraction, les deux termes seulement devront être entourés de doubles parenthèses, lorsqu'on voudra indiquer la somme des indices correspondants aux valeurs réelles de s qui rendent ce terme nul, si c'est le dénominateur, ou infini, si c'est le numérateur. Enfin, si l'un des termes est décomposé en facteurs, un seul de ces facteurs devra être entouré de doubles parenthèses, lorsqu'on voudra exprimer la somme des indices correspondants aux valeurs réelles de s qui rendent ce facteur nul ou infini. De plus, si, parmi les racines réelles de l'équation (77) on considère uniquement celles qui se trouvent comprises entre deux limites données s_0, s_1, la somme des valeurs correspondantes de l'expression (78) sera désignée par

$$I_{s_0}^{s_1}((f(s))) \tag{79}$$

Cela posé, chacune des expressions (78), (79) sera formée par la réunion de plusieurs termes correspondants aux différentes racines de l'équation (77), et dont l'un quelconque sera équivalent à $+1$, si la fonction $f(s)$ passe du négatif au positif, à zéro, si cette fonction, en devenant infinie, ne change pas de signe, et à -1, si elle passe du positif au négatif. Ajoutons que, si la limite s_1 devient

une racine de l'équation (77), le terme correspondant à $s = s_0$, dans la somme représentée par la notation (79), devra être réduit à

$$\pm \frac{\varphi(s_0+\varepsilon)}{\sqrt{(\varphi(s_0+\varepsilon))^2}}, \tag{80}$$

c'est-à-dire, à $\frac{1}{2}$ ou à $-\frac{1}{2}$, suivant que la fonction $\varphi(s)$ deviendra positive ou négative pour des valeurs de s supérieures à s_0 de même, si la limite s_1 devient une racine de l'équation (77), le terme correspondant à $s = s_1$, dans la somme (79), devra être réduit à

$$-\frac{1}{2}\frac{\varphi(s_1-\varepsilon)}{\sqrt{(\varphi(s_1-\varepsilon))^2}}, \tag{81}$$

c'est-à-dire, à $-\frac{1}{2}$ ou à $\frac{1}{2}$, suivant que la fonction $\varphi(s)$ deviendra positive ou négative pour des valeurs de s inférieures à s_1. Ces divisions conventionnelles sont analogues à celles que nous avons admises dans le calcul des résidus, et c'est aussi par des considérations analogues qu'on serait conduit à leur adoption. Si dans la notation (79) on suppose $s_0 = -\infty$, $s_1 = \infty$, on aura évidemment

$$\mathcal{J}_{-\infty}^{\infty}(\!|\, \varphi(s) \,|\!) = \mathcal{J}(\!|\, \varphi(s) \,|\!). \tag{82}$$

Suivant des conventions que nous venons d'admettre, les formules (70), (72), (70) deviendront

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{Q'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)}{Q(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \tfrac{1}{2}[\pm f(s_1)] - \tfrac{1}{2}[\pm f(s_0)] - \pi\sqrt{-1}\,\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}(\!|\, \frac{\chi(s)}{Q(s)} \,|\!), \tag{83}$$

$$\int_{s_0}^{c} \frac{Q'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)}{Q(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = -\pi\sqrt{-1}\,\mathcal{J}_{s_0}^{c}(\!|\, \frac{\chi(s)}{Q(s)} \,|\!), \tag{84}$$

$$m = -\frac{1}{\pi}\mathcal{J}_{s_0}^{c}(\!|\, \frac{\chi(s)}{Q(s)} \,|\!) = \frac{1}{\pi}\mathcal{J}_{s_0}^{c}(\!|\, \varphi(s) \,|\!). \tag{85}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante

3e Théorème. Les mêmes choses étant posées que dans le théorème 2e, si l'on suppose z exprimé en fonction de s, et

$$f(z) = \varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s),$$

$\varphi(s)$, $\chi(s)$ désignant des fonctions réelles de s, le nombre des racines de l'équation (49) qui correspondront à des points situés dans l'intérieur du contour $OO'O''$... sera précisément la moitié de l'indice intégral

$$-\int_0^c \left(\!\left(\frac{\chi(s)}{\varphi(s)} \right)\!\right),$$

c étant le périmètre du même contour.

Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit le produit de plusieurs autres fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$, etc..., dont chacune reste finie et continue ainsi que sa dérivée pour tous les points renfermés dans le contour $OO'O''$... On aura

(86) $$f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \ldots\ldots,$$

et par suite

(87) $$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} + \frac{f_2'(z)}{f_2(z)} + \ldots$$

Donc la formule (49) donnera

(88) $$m = m_1 + m_2 + \text{etc.} \ldots,$$

les nombres m_1, m_2, ... étant respectivement déterminés par les formules

(89) $$\left\{ \begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} \frac{\partial z}{\partial s}\, ds, \\ m_2 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c \frac{f_2'(z)}{f_2(z)} \frac{\partial z}{\partial s}\, ds, \\ &\text{etc.} \ldots \end{aligned} \right.$$

et indiquant en conséquence combien les équations

(90) $$f_1(z) = 0, \quad f_2(z) = 0, \quad \text{etc.} \ldots\ldots,$$

considérées l'une après l'autre, offrent des racines correspondantes à des points renfermés dans le contour $OO'O''\ldots$ Il était d'ailleurs facile de prévoir que la somme des nombres $m_1, m_2, \ldots$ ainsi déterminés reproduirait précisément le nombre m.

Si l'un des facteurs $f_1(z)$, $f_2(z)$, $\ldots$ se réduit à une constante réelle ou imaginaire, sa dérivée sera nulle, et parmi les nombres $m_1, m_2, \ldots$ celui qui répondra au facteur dont il s'agit s'évanouira. Or, si l'on désigne par γ un arc réel et constant, on aura identiquement

$$f(z) = (\cos\gamma + \sqrt{-1}\,\sin\gamma)\,\frac{f(z)}{\cos\gamma + \sqrt{-1}\,\sin\gamma}.$$

Donc, en posant

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{\cos\gamma + \sqrt{-1}\,\sin\gamma}, \qquad f_2(z) = \cos\gamma + \sqrt{-1}\,\sin\gamma, \tag{91}$$

on trouvera $m = m_1$. D'autre part, si l'on remplace $f(z)$ par

$$\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)$$

dans la première des équations (91), on en tirera

$$f_1(z) = \varphi(s)\cos\gamma + \chi(s)\sin\gamma + \{\chi(s)\cos\gamma - \varphi(s)\sin\gamma\}\sqrt{-1}, \tag{92}$$

et en conséquence la formule (89) donnera

$$m_1 = \frac{1}{2}\int_0^c \left\| \frac{\varphi(s)\sin\gamma - \chi(s)\cos\gamma}{\varphi(s)\cos\gamma + \chi(s)\sin\gamma} \right\|.$$

On aura donc aussi

$$m = \frac{1}{2}\int_0^c \left\| \frac{\varphi(s)\sin\gamma - \chi(s)\cos\gamma}{\varphi(s)\cos\gamma + \chi(s)\sin\gamma} \right\|. \tag{93}$$

Dans cette dernière formule, l'arc réel γ peut être choisi arbitrairement. Si l'on pose $\gamma = 0$, on sera aussitôt ramené à la formule (89). Si l'on pose au contraire $\gamma = \frac{\pi}{2}$, on trouvera

$$m = \frac{1}{2}\int_0^c \left\| \frac{\varphi(s)}{\chi(s)} \right\| = -\frac{1}{2}\int_0^c \left\| \frac{1}{f(s)} \right\|. \tag{94}$$

Supposons encore que la fonction $f(z)$ étant décomposée en deux parties, $\Pi(z)$, $\varpi(z)$, le module du rapport

$$\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)} \tag{95}$$

reste inférieur à l'unité pour toutes les valeurs de z correspondantes à des points situés sur le contour $OO'O''\ldots$, entendez qu'on ait tout à la fois

$$f(z) = \Pi(z) + \varpi(z), \tag{96}$$

et

$$\Lambda \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)} < 1. \tag{97}$$

Pour tous les points dont il s'agit, la partie réelle du binôme

$$1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)} \tag{98}$$

conservera le même signe que son premier terme 1. Donc, si l'on pose

$$f_1(z) = \Pi(z), \qquad f_2(z) = 1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}, \tag{99}$$

on aura

$$m_2 = 0,$$

et par suite

$$m = m_1.$$

En conséquence on peut énoncer la proposition suivante

1e Théorème. Les mêmes choses étant posées que dans le théorème 2, si la fonction $f(z)$ est partagée en deux autres $\Pi(z)$, $\varpi(z)$, de manière que l'on ait

$$\Lambda \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)} < 1,$$

les racines correspondantes à des points renfermés dans l'intérieur du contour $OO'O''\ldots$ seront en même nombre dans l'équation

(49) et pour la suivante

(100) $$\Pi(z) = 0.$$

Dans l'hypothèse que nous venons d'admettre, l'équation (46), réduite à

(101) $$f(z) = \Pi(z)\left\{1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right\}$$

donnera évidemment

(102) $$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)} + \frac{\partial 1\left\{1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right\}}{\partial z}.$$

Si donc, si l'on nomme

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$$

celles des racines de l'équation (100) qui correspondent à des points situés sur le contour $OO'O''\ldots$,

$$z_1, z_2, \ldots z_m$$

étant toujours les racines qui remplissent la même condition pour l'équation (49), on tirera de la formule (46)

(103) $$F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m) = F(\xi_1) + F(\xi_2) + \ldots + F(\xi_m) + \mathcal{E}\left(\left| \frac{\partial 1\left\{1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right\}}{\partial z} F(z) \right|\right).$$

D'ailleurs pour tous les points situés sur le contour $OO'O''\ldots$, le logarithme

(104) $$1\left\{1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right\}$$

sera développable en série convergente par la formule

(105) $$1\left\{1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right\} = \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right\}^2 + \frac{1}{3}\left\{\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right\}^3 - \text{etc.}\ldots$$

Donc, si à l'aide de l'équation (26) on transforme l'exponentielle

$$\mathcal{E}\left(\left| F(z) \frac{\partial 1\left\{1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right\}}{\partial z} \right|\right)$$

en une intégrale définie, la fonction sous le signe $\int$ sera elle-même développable en une semblable série, le terme général de cette dernière série étant

$$(107)\quad \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi\sqrt{-1}}\,\frac{1}{n}\int_0^c F(z)\,\frac{\partial 1\left\{1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right\}}{\partial s}\,\partial s = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,\mathcal{E}\left(\left(F(z)\,\frac{\partial.\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^n}{\partial z}\right)\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(108)\quad \frac{(-1)^n}{n}\,\mathcal{E}\left(\left(F'(z)\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^n\right)\right).$$

On aura donc

$$(109)\quad F(z_1)+F(z_2)+\cdots+F(z_m) = F(\xi_1)+F(\xi_2)+\cdots+F(\xi_m) - \mathcal{E}\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}F'(z)\right)\right)+\frac{1}{2}\,\mathcal{E}\left(\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^2 F'(z)\right)\right) - \text{etc.}$$

Ajoutons qu'en vertu du premier théorème le module du terme général, c'est à dire, du n^{me} terme de la série, sera inférieur à la quantité

$$(110)\quad \frac{c}{2n\pi}\,\Lambda\left\{\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^n F'(z)\right\},$$

et par conséquent au produit

$$(111)\quad \frac{c}{2n\pi}\,\Lambda F'(z).\left\{\Lambda\,\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right\}^n.$$

Donc si l'on pose, pour abréger,

$$(112)\quad \Lambda\,\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)} = M,\qquad \Lambda F'(z) = N,$$

le n^{me} terme de la série qui représente le développement de l'expression (106) aura un module inférieur à

$$(113)\quad \frac{cN}{2\pi}\,\frac{M^n}{n};$$

et la somme faite de ce terme et de ceux qui le suivent, ou le reste de la série, offrira un module inférieur au produit

$$(114)\quad \frac{cN}{2\pi}\left\{\frac{M^n}{n}+\frac{M^{n+1}}{n+1}+\frac{M^{n+2}}{n+2}+\cdots\right\}.$$

D'autre part, M étant < 1, la somme

$$(115)\quad \frac{M^n}{n}+\frac{M^{n+1}}{n+1}+\frac{M^{n+2}}{n+2}+\cdots$$

est évidemment inférieure, non seulement à la suivante

(116) $$\frac{M^n}{1}+\frac{M^{n+1}}{2}+\frac{M^{n+2}}{3}+\cdots = M^n 1\left(\frac{1}{1-M}\right),$$

mais encore à celle-ci

(117) $$\frac{M^n}{n}+\frac{M^{n+1}}{n}+\frac{M^{n+2}}{n}+\cdots = \frac{M^n}{n(1-M)}.$$

Donc le reste de la série que renferme le second membre de la formule (109) aura pour module un nombre qui ne surpassera pas chacun des produits

(118) $$\frac{cN}{2\pi} M^n 1\left(\frac{1}{1-M}\right), \qquad \frac{cN}{2\pi}\frac{M^n}{n(1-M)}.$$

Si l'on prend $F(z)=z$, la formule (109) donnera

(119) $$z_1+z_2+\cdots+z_m = \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_m$$
$$-\mathcal{E}\left(\left(\frac{B(z)}{\Pi(z)}\right)\right)+\frac{1}{2}\mathcal{E}\left(\left(\left(\frac{B(z)}{\Pi(z)}\right)^2\right)\right)-\frac{1}{3}\mathcal{E}\left(\left(\left(\frac{B(z)}{\Pi(z)}\right)^3\right)\right)+\text{etc}\ldots,$$

et le reste de cette dernière série aura pour module un nombre qui ne surpassera pas chacun des produits

(120) $$\frac{c}{2\pi} M^n 1\left(\frac{1}{1-M}\right), \qquad \frac{c}{2\pi}\frac{M^n}{n(1-M)}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante

<u>5e Théorème</u>. Les mêmes choses étant posées que dans le théorème 4, si l'on nomme $z_1, z_2, \ldots z_m$ celles des racines de l'équation (49), et $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ celles des racines de l'équation (100) qui correspondent à des points renfermés dans l'intérieur du contour $OO'O''\ldots$, la différence entre les deux sommes

(121) $$z_1+z_2+\cdots+z_m, \qquad \xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_m$$

ou bien encore entre les deux suivantes

(122) $$F(z_1)+F(z_2)+\cdots+F(z_m), \quad F(\xi_1)+F(\xi_2)+\cdots+F(\xi_m)$$

sera développable par la formule (109) ou (119) en une série convergente dont les différents termes pourront être exprimés en fonction des

mêmes $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_m$, et les restes de ces deux séries offriront des modules inférieurs à chacun des produits (118) ou (120)

Si l'on prend

$$\Pi(z) = (z-a)^m,$$

a désignant une constante arbitrairement choisie, l'équation (45) sera réduite à

(123) $$(z-a)^m + \mathfrak{S}(z) = 0,$$

et les formules (109), (119) donneront

(124) $$F(z_1) + F(z_2) + \dots + F(z_m) = m F(a) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1.2\dots(mn-1)} \frac{\partial^{mn-1}\{(\mathfrak{S}(a))^m F'(a)\}}{\partial a^{mn-1}},$$

(125) $$z_1 + z_2 + \dots + z_m = ma + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1.2\dots(mn-1)} \frac{\partial^{mn-1}[\mathfrak{S}(a)]^m}{\partial a^{mn-1}},$$

pourvu que l'on ait

(126) $$\Lambda \frac{\mathfrak{S}(z)}{(z-a)^m} < 1.$$

Si l'on posant m se réduit à l'unité, l'équation (123) deviendra

(127) $$z - a + \mathfrak{S}(z) = 0,$$

et, pour déterminer la racine z de cette dernière équation, ou une fonction $F(z)$ de cette racine, on aura, au lieu des formules (124), (125), celles que Lagrange a données, savoir,

(128) $$F(z) = F(a) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2.3\dots n} \frac{\partial^{n-1}\{[\mathfrak{S}(a)]^n F'(a)\}}{\partial a^{n-1}},$$

(129) $$z = a + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2.3\dots n} \frac{\partial^{n-1}[\mathfrak{S}(a)]^n}{\partial a^{n-1}}.$$

Ces dernières subsisteront, pourvu que l'on ait

(130) $$\Lambda \frac{\mathfrak{S}(z)}{z-a} < 1.$$

Enfin, si l'on pose $a = 0$, l'équation (123) et les formules (124), (125) donne-

-rent

$$z^m + \mathcal{B}(z) = 0, \tag{101}$$

$$\Sigma(z_1) + \Sigma(z_2) + \cdots + \Sigma(z_m) = m\Sigma(0) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1.2\ldots(mn-1)} \frac{\partial^{mn-1}\{[\mathcal{B}(\varepsilon)]^n \Sigma'(\varepsilon)\}}{\partial \varepsilon^{mn-1}}, \tag{102}$$

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_m = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1.2\ldots(mn-1)} \frac{\partial^{mn-1}[\mathcal{B}(\varepsilon)]^n}{\partial \varepsilon^{mn-1}}, \tag{103}$$

ε désignant un nombre infiniment petit que l'on devra réduire à zéro, après les différenciations effectuées, et la condition (126) deviendra

$$\Lambda \frac{\mathcal{B}(z)}{z^m} < 1. \tag{104}$$

Dans ces équations (102), (103), et la condition (100) deviendront réduites à

$$z + \mathcal{B}(z) = 0, \tag{105}$$

$$\Sigma(z) = \Sigma(0) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n} \frac{\partial^{n-1}\{[\mathcal{B}(\varepsilon)]^n \Sigma'(\varepsilon)\}}{\partial \varepsilon^{n-1}}, \tag{106}$$

$$z = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n} \frac{\partial^{n-1}[\mathcal{B}(\varepsilon)]^n}{\partial \varepsilon^{n-1}}, \tag{107}$$

$$\Lambda \frac{\mathcal{B}(z)}{z} < 1. \tag{108}$$

Pour faciliter l'application des théorèmes 1, 2, 3, 4, 5, nous allons maintenant nous occuper de la détermination des quantités de la forme

$$\Lambda f(z) \quad \text{et} \quad \int_{s_0}^{s} \| f(s) \|,$$

en supposant que la fonction $f(z)$ reste finie et continue pour tous les points situés sur le contour $OO'O''\ldots$

Nous démontrerons d'abord que, si l'on désigne par $f(s)$ la fonction de s en laquelle se transforme

$$f(z) = f(x + y\sqrt{-1}),$$

quand, pour un point quelconque des points situés sur le contour $OO'O''\ldots$,

on exprime

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

en fonction de s, la quantité

$$\Lambda f(z),$$

c'est à dire, le plus grand des modules de $f(z)$ qui correspondent aux points dont il s'agit sera en même temps le plus grand des modules de $f(s)$ qui correspondent à des valeurs réelles de s comprises entre les limites $s=0$, $s=c$. Donc, si l'on désigne par la notation

$$\Lambda_{s_0}^{s_1} f(s) \tag{129}$$

le plus grand des modules de $f(s)$ qui correspondent à des valeurs réelles de s comprises entre les limites $s=s_0$, $s=s_1$, on aura généralement

$$\Lambda f(z) = \Lambda_0^c f(s). \tag{130}$$

Soit maintenant t une variable qui croisse ou décroisse constamment, tandis que l'on fait croître ou décroître l'aire s entre les limites $s=s_0$, $s=s_1$. Désignons par

$$s = \Sigma$$

la valeur de s exprimée en fonction de t, et par

$$t_0, t_1$$

les valeurs entières de t, t_0 étant $< t_1$, suivant qu'on ait

$$t=t_0 \text{ pour } s=s_0, \text{ et } t=t_1 \text{ pour } s=s_1,$$

ou bien

$$t=t_0 \text{ pour } s=s_1, \text{ et } t=t_1 \text{ pour } s=s_0,$$

suivant que $\frac{d\Sigma}{dt}$ sera positif ou négatif entre les limites $t=t_0$, $t=t_1$. On trouvera évidemment

$$\Lambda_{s_0}^{s_1} f(s) = \Lambda_{t_0}^{t_1} f(\Sigma), \tag{131}$$

et

$$(1h2) \qquad \mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\!\left(f(s)\right)\!\right)_0 = \pm \mathcal{J}_{t_0}^{t_1}\left(\!\left(f(T)\right)\!\right),$$

le double signe devant être réduit au signe + ou au signe −, suivant que la variable t croîtra ou décroîtra pour des valeurs croissantes de t. Ajoutons que, si $f(s)$ représente ce que devient une fonction réelle

$$\psi(x, y)$$

des coordonnées x, y, quand on suppose ces coordonnées exprimées par le moyen de l'arc s, $f(T)$ représentera ce que devient la même fonction réelle, quand on suppose les mêmes coordonnées exprimées en fonction de la variable t. D'autre part, si, entre les limites $s=0$, $s=c$, on interpose de nouvelles valeurs de s qui soient désignées par

$$(1h3) \qquad s_0, s_1, s_2, \ldots s_i,$$

et forment une série croissante, le périmètre c du contour $OO'O''\ldots$ se trouvera divisé en plusieurs parties

$$OO' = s_0, \quad O'O'' = s_1 - s_0, \quad O''O''' = s_2 - s_1, \text{ etc} \ldots,$$

et l'on reconnaîtra facilement 1° que le module maximum

$$(1h4) \qquad \Lambda_0^c f(s)$$

est la plus petite des quantités positives

$$(1h5) \qquad \Lambda_0^{s_0} f(s), \ \Lambda_{s_0}^{s_1} f(s), \ldots \Lambda_{s_i}^{c} f(s),$$

2° que l'indice

$$(1h6) \qquad \mathcal{J}_0^c\left(\!\left(f(s)\right)\!\right)$$

se décompose en plusieurs indices semblables par le moyen de la formule

$$(1h7) \qquad \mathcal{J}_0^c\left(\!\left(f(s)\right)\!\right) = \mathcal{J}_0^{s_0}\left(\!\left(f(s)\right)\!\right) + \mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\!\left(f(s)\right)\!\right) + \ldots + \mathcal{J}_{s_i}^{c}\left(\!\left(f(s)\right)\!\right)$$

On pourra donc réduire la détermination des quantités (1h4), (1h5) à

celle d'autres quantités de la même forme, correspondantes à des valeurs extrêmes de s dont la différence sera moindre, et appliquer à l'évaluation de ces dernières quantités les formules (164), (162). Disposons même, dans l'application dont il s'agit, prendre successivement pour t diverses variables réelles distinctes les unes des autres; ce qui abrégera de beaucoup les calculs, ainsi que nous le montrerons par des exemples.

Concevons en premier lieu que le contour $OO'O''\ldots$ se réduise au système des quatre droites représentées par l'équation (11). Les valeurs des correspondantes aux points situés sur ces quatre droites seront

$$(168) \qquad z = x + y\sqrt{-1}, \quad z = X + y\sqrt{-1}, \quad z = x + Y\sqrt{-1}, \quad z = x_0 + y\sqrt{-1},$$

et, si l'on prend pour valeurs correspondantes de t celles qui suivent

$$(169) \qquad t = x, \quad t = y, \quad t = x, \quad t = y,$$

alors, en supposant l'arc s compté à partir du point (x_0, y_0), on trouvera successivement

$$(170) \qquad t = x_0 + s, \quad t = -X + x_0 + y_0 + s, \quad t = 2X - x_0 + Y - y_0 - s, \quad t = 2X - 2x_0 + 2Y - y_0 - s;$$

par conséquent la variable t croîtra ou décroîtra pour des valeurs croissantes de s, suivant que l'on considérera un point situé sur l'une des deux premières droites ou sur l'une des deux dernières. Cela posé, le module (160) sera la plus petite des quantités positives

$$(171) \qquad \Lambda_{x_0}^{X} f(x + y_0\sqrt{-1}), \quad \Lambda_{y_0}^{Y} f(X + y\sqrt{-1}), \quad \Lambda_{x_0}^{X} f(x + Y\sqrt{-1}), \quad \Lambda_{y_0}^{Y} f(x_0 + y\sqrt{-1}),$$

et, en admettant que l'on ait, pour tous les points situés sur le contour $OO'O''\ldots$,

$$(172) \qquad f(s) = \psi(x, y),$$

on tirera des formules (164), (171) réunies

$$(173) \qquad J_{s_0}^{s} \| f(s) \| = J_{x_0}^{X} \| \psi(t, y_0) \| + J_{y_0}^{Y} \| \psi(X, t) \| - J_{x_0}^{X} \| \psi(t, Y) \| - J_{y_0}^{Y} \| \psi(x_0, t) \|,$$

ou, ce qui revient au même,

(154) $$\mathcal{J}_0^c(\!(f(s))\!) = \mathcal{J}_{x_0}^X(\!(\psi(x,y_0))\!) + \mathcal{J}_{y_0}^Y(\!(\psi(X,y))\!) - \mathcal{J}_{x_0}^X(\!(\psi(x,Y))\!) - \mathcal{J}_{y_0}^Y(\!(\psi(x_0,y))\!).$$

Imaginons, pour fixer les idées, que, τ désignant un arc réel, on ait

(155) $$f(s) = \frac{\varphi(s)\sin\tau - \chi(s)\cos\tau}{\varphi(s)\cos\tau + \chi(s)\sin\tau},$$

les fonctions réelles

$$\varphi(s),\ \chi(s),$$

étant déduites de la fonction imaginaire

$$f(z) = f(x+y\sqrt{-1}),$$

par le moyen de l'équation (53). Alors, si l'on nomme

$$\varphi(x,y) \text{ et } \chi(x,y)$$

les deux fonctions réelles de x, y que détermine la formule

(156) $$f(x+y\sqrt{-1}) = \varphi(x,y) + \sqrt{-1}\,\chi(x,y),$$

ensorte que $\varphi(s)$ et $\chi(s)$ soient précisément ce que deviennent $\varphi(x,y)$ et $\chi(x,y)$ quand on exprime x et y en fonctions de s, on aura évidemment

(157) $$\psi(x,y) = \frac{\varphi(x,y)\sin\tau - \chi(x,y)\cos\tau}{\varphi(x,y)\cos\tau + \chi(x,y)\sin\tau}.$$

Si l'on réduit l'arc τ à zéro ou à $\frac{\pi}{2}$, l'équation (157) donnera simplement

(158) $$\psi(x,y) = -\frac{\chi(x,y)}{\varphi(x,y)},$$

ou bien

(159) $$\psi(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{\chi(x,y)}.$$

Lorsque la fonction $f(z)$ se présente sous forme réelle, l'équation (156) entraîne généralement la suivante

(160) $$f(x-y\sqrt{-1}) = \varphi(x,y) - \sqrt{-1}\,\chi(x,y).$$

On a donc alors

$$(161)\qquad \begin{cases} Q(x,y) = \dfrac{f(x+y\sqrt{-1}) + f(x-y\sqrt{-1})}{2}, \\ X(x,y) = \dfrac{f(x+y\sqrt{-1}) - f(x-y\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

et par suite

$$(162)\qquad \begin{cases} Q(x,y)\cos^2 + X(x,y)\sin^2 = \dfrac{e^{2\theta\sqrt{-1}} f(x-y\sqrt{-1}) - e^{-2\theta\sqrt{-1}} f(x+y\sqrt{-1})}{2}, \\ Q(x,y)\sin^2 - X(x,y)\cos^2 = \dfrac{e^{2\theta\sqrt{-1}} f(x-y\sqrt{-1}) + e^{-2\theta\sqrt{-1}} f(x+y\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

admette que les équations (157), (158), (159) peuvent s'écrire ainsi:

$$(163)\qquad \psi(x,y) = \frac{e^{2\theta\sqrt{-1}} f(x+y\sqrt{-1}) - e^{-2\theta\sqrt{-1}} f(x-y\sqrt{-1})}{e^{-2\theta\sqrt{-1}} f(x+y\sqrt{-1}) + e^{2\theta\sqrt{-1}} f(x-y\sqrt{-1})}\sqrt{-1},$$

$$(164)\qquad \psi(x,y) = \frac{f(x+y\sqrt{-1}) - f(x-y\sqrt{-1})}{f(x+y\sqrt{-1}) + f(x-y\sqrt{-1})}\sqrt{-1},$$

$$(165)\qquad \psi(x,y) = \frac{f(x+y\sqrt{-1}) + f(x-y\sqrt{-1})}{f(x+y\sqrt{-1}) - f(x-y\sqrt{-1})}\sqrt{-1}.$$

Concevons à présent que, r et ρ étant des coordonnées polaires, le contour $OO'O''\ldots$ soit formé au système de deux droites $OO', O''O'''$ et de deux arcs de cercle $O'O'', O'''O$, représentés par les équations (20). Les valeurs de z correspondantes aux quatre lignes $OO', O'O'', O''O''', O'''O$ seront respectivement

$$(166)\qquad z = re^{\rho\sqrt{-1}},\quad z = Re^{\rho\sqrt{-1}},\quad z = re^{\Pi\sqrt{-1}},\quad z = r_0 e^{\mu\sqrt{-1}};$$

et, si l'on prend pour valeurs correspondantes de t celles qui suivent

$$(167)\qquad t = r,\quad t = \rho,\quad t = r,\quad t = \rho,$$

alors, en supposant l'arc s compté à partir du point O qui a pour coordonnées polaires r_0, ρ_0, on trouvera successivement

$$(168)\quad t = r_1 - s,\quad t = -1 + \frac{r_1}{R} + \rho_0 + \frac{s}{R},\quad t = 2R - w_0 + R(\rho - \rho_0) - s,\quad t = 2\left(\frac{R}{r_0} - 1\right) + \frac{R}{r_1}(\rho - \rho_0) + 2 - \frac{s}{r_1};$$

par conséquent la variable t croîtra ou décroîtra pour des valeurs croissantes de s, suivant que l'on considérera un point situé sur l'une des deux premières lignes OO', $O'O''$, ou sur l'une des deux dernières $O''O'''$, $O'''O$. Cela posé, le module (140) sera la plus petite des quantités positives

$$(169)\qquad \Lambda^{R}_{r_0} f(re^{r_0\sqrt{-1}}),\ \Lambda^{P}_{p_0} f(Re^{p\sqrt{-1}}),\ \Lambda^{R}_{r_0} f(re^{P\sqrt{-1}}),\ \Lambda^{P}_{p_0} f(r_0 e^{p\sqrt{-1}}),$$

et, en admettant que la fonction $f(s)$ vérifie, pour tous les points situés sur le contour $OO'O''$ la formule (152), on tirera des équations (147), (151)

$$(170)\qquad \mathcal{J}^{a}_{0}\big(\!\big(f(s)\big)\!\big) = \mathcal{J}^{R}_{r_0}\big(\!\big(\psi(r\cos p_0, r\sin p_0)\big)\!\big) + \mathcal{J}^{P}_{p_0}\big(\!\big(\psi(R\cos p, R\sin p)\big)\!\big)$$
$$- \mathcal{J}^{R}_{r_0}\big(\!\big(\psi(r\cos P, r\sin P)\big)\!\big) - \mathcal{J}^{P}_{p_0}\big(\!\big(\psi(r_0\cos p, r_0\sin p)\big)\!\big).$$

Si, la fonction $f(z)$ se présentant sous une forme réelle, la valeur générale de $\psi(x,y)$ est déterminée par le système des formules (156), (157), (160), ou, ce qui revient au même, par l'équation (163), on aura évidemment

$$(171)\qquad \psi(r\cos p, r\sin p) = \frac{e^{-i\sqrt{-1}} f(re^{p\sqrt{-1}}) + e^{i\sqrt{-1}} f(re^{-p\sqrt{-1}})}{e^{-i\sqrt{-1}} f(re^{p\sqrt{-1}}) - e^{i\sqrt{-1}} f(re^{-p\sqrt{-1}})}\sqrt{-1}.$$

On peut aisément exprimer, à l'aide des notations dont nous venons de faire usage, le nombre m des racines de l'équation (45) qui correspondent à des points renfermés dans le contour $OO'O''$, lorsque ce contour est formé par les quatre droites ou par les deux droites et les deux arcs de cercle ci-dessus mentionnés. En effet de l'équation (89), jointe à la formule (153) ou (170), on tirera dans le premier cas

$$(172)\qquad m = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \mathcal{J}^{X}_{x_0}\big(\!\big(\psi(x, y_0)\big)\!\big) + \mathcal{J}^{Y}_{y_0}\big(\!\big(\psi(X, y)\big)\!\big) \\ - \mathcal{J}^{X}_{x_0}\big(\!\big(\psi(x, Y)\big)\!\big) - \mathcal{J}^{Y}_{y_0}\big(\!\big(\psi(x_0, y)\big)\!\big) \end{array}\right\},$$

et, dans le second cas

$$m = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \mathcal{J}_{r_0}^{R}\left(\!\left(\psi\left(\rho\cos\rho_0, \rho\sin\rho_0\right)\right)\!\right) + \mathcal{J}_{\rho_0}^{\rho}\left(\!\left(\psi\left(R\cos\rho, R\sin\rho\right)\right)\!\right) \\ - \mathcal{J}_{r_0}^{R}\left(\!\left(\psi\left(\rho\cos\beta, \rho\sin\beta\right)\right)\!\right) - \mathcal{J}_{r_0}^{R}\left(\!\left(\psi\left(r_0\cos\rho, r_0\sin\rho\right)\right)\!\right) \end{array}\right\}, \tag{170}$$

la valeur de $\psi(x, y)$ étant déterminée par le système des équations (165), (167), qui pourront être remplacées, si la fonction $\mathfrak{L}(z)$ représente une forme réelle, par la seule équation (168).

Si l'on veut déterminer le nombre des racines réelles ou imaginaires de l'équation (45) qui offrent des modules inférieurs à R, il faudra réduire le contour $OO'O''\ldots$ à la circonférence d'un cercle décrit de l'origine des coordonnées avec le rayon R ; et la formule (170) donnera

$$m = \frac{1}{2}\,\mathcal{J}_{-\pi}^{\pi}\left(\!\left(\psi\left(R\cos\rho, R\sin\rho\right)\right)\!\right). \tag{171}$$

Si l'on veut déterminer le nombre des racines réelles ou imaginaires qui offrent à la fois des modules inférieurs à R et des parties réelles positives, il faudra réduire le contour $OO'O''\ldots$ à un demi-cercle décrit avec le rayon R du côté des positives, et appuyé sur celui des diamètres qui coïncide avec l'axe des y. Par suite on devra poser $\rho = -\frac{\pi}{2}$, $\Pi = \frac{\pi}{2}$, $r_0 = 0$, dans la formule (170), laquelle se réduira à

$$m = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{J}_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\!\left(\psi\left(R\cos\rho, R\sin\rho\right)\right)\!\right) + \mathcal{J}_{0}^{R}\left(\!\left(\psi\left(0, -r\right)\right)\!\right) - \mathcal{J}_{0}^{R}\left(\!\left(\psi\left(0, r\right)\right)\!\right)\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$m = \frac{1}{2}\,\mathcal{J}_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\!\left(\psi\left(R\cos\rho, R\sin\rho\right)\right)\!\right) - \frac{1}{2}\,\mathcal{J}_{-R}^{R}\left(\!\left(\psi\left(0, y\right)\right)\!\right). \tag{172}$$

Si l'on veut au contraire déterminer le nombre des racines réelles ou imaginaires qui offrent à la fois des modules inférieurs à R et des parties réelles négatives, on devra dans la formule (170) poser successivement $\rho_0 = -R$, $\Pi = -\frac{\pi}{2}$, $r_0 = 0$, et $\rho_0 = \frac{\pi}{2}$, $\Pi = \pi$, $r_0 = 0$, puis ajouter

les résultats ainsi obtenus, ou, ce qui revient au même, poser immédiatement $y_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = 2\frac{\pi}{2}$, $r_0 = 0$; et l'on trouvera de cette manière

$$m = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \left[\!\left[\psi(0,y) \right]\!\right] + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\frac{\pi}{2}} \left[\!\left[\psi(R\cos\rho, R\sin\rho) \right]\!\right]. \tag{176}$$

Si l'on voulait obtenir le nombre des racines dans lesquelles les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ sont, abstraction faite du signe, inférieurs à R, il faudrait poser, dans la formule (172),

$$x_0 = -R, \quad x_1 = R, \quad y_0 = -R, \quad Y = R,$$

et l'on trouverait en conséquence

$$\begin{aligned} m = {} & \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \left[\!\left[\psi(x,-R) \right]\!\right] + \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \left[\!\left[\psi(R,y) \right]\!\right] \\ & - \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \left[\!\left[\psi(x,R) \right]\!\right] - \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \left[\!\left[\psi(-R,y) \right]\!\right]. \end{aligned} \tag{177}$$

Si, parmi les mêmes racines, on voulait seulement considérer celles dans lesquelles la partie réelle est positive ou négative, on aurait, dans le premier cas,

$$\begin{aligned} m = {} & \frac{1}{2}\int_{0}^{R} \left[\!\left[\psi(x,-R) \right]\!\right] + \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \left[\!\left[\psi(R,y) \right]\!\right] \\ & - \frac{1}{2}\int_{0}^{R} \left[\!\left[\psi(x,R) \right]\!\right] - \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \left[\!\left[\psi(0,y) \right]\!\right], \end{aligned} \tag{178}$$

et, dans le second cas,

$$\begin{aligned} m = {} & \frac{1}{2}\int_{-R}^{0} \left[\!\left[\psi(x,-R) \right]\!\right] + \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \left[\!\left[\psi(0,y) \right]\!\right] \\ & - \frac{1}{2}\int_{-R}^{0} \left[\!\left[\psi(x,R) \right]\!\right] - \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \left[\!\left[\psi(-R,y) \right]\!\right]. \end{aligned} \tag{179}$$

Lorsque le nombre R est choisi de manière à surpasser toutes les racines de l'équation (A), chacune des formules (176), (177) détermine le nombre total des racines réelles ou imaginaires ; chacune des formules (178), (179) détermine le nombre total des racines dans lesquelles la partie réelle est positive, auquel on doit ajouter, si les parties réelles de quelques racines s'évanouissent, la moitié du nombre de ces dernières ; enfin chacune des formules (176), (179) détermine le nombre total

Les racines dont la partie réelle est négative, ajoutés, s'il y a lieu, à la moitié du nombre des celles dont la partie réelle se réduisent à zéro.

Si l'on voulait déterminer le nombre des racines réelles dont les valeurs numériques sont inférieures à R, il faudrait poser, dans l'équation (172),

$$x_0 = -R, \quad x_n = R, \quad \text{et} \quad y_0 = -\varepsilon, \quad Y = \varepsilon,$$

ε désignant un nombre infiniment petit, on aurait

$$(180) \qquad m = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \int_{-R}^{R} \| \psi(x,-\varepsilon) \| + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\!(\psi(R,y))\!) \\ - \int_{-R}^{R} \| \psi(x,\varepsilon) \| - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \| \psi(-R,y) \| \end{array}\right\}.$$

Pareillement le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives, augmentés chacun de la moitié du nombre des racines nulles, s'il en existe, seront déterminés par les équations

$$(181) \qquad m = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \int_{0}^{R} \| \psi(x,-\varepsilon) \| + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\!(\psi(R,y))\!) \\ - \int_{0}^{R} \| \psi(x,\varepsilon) \| - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\!(\psi(0,y))\!) \end{array}\right\},$$

$$(182) \qquad m = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \int_{-R}^{0} \| \psi(x,-\varepsilon) \| + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\!(\psi(0,y))\!) \\ - \int_{-R}^{0} \| \psi(x,\varepsilon) \| - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\!(\psi(-R,y))\!) \end{array}\right\};$$

il n'est donc besoin de considérer les racines dont le module est inférieur à R. Pourvu que les formules (180), (181), (182) s'étendent la première à toutes les racines réelles, et les deux autres à toutes les racines positives ou négatives, il suffit que le nombre R surpasse les valeurs numériques de toutes les racines réelles.

On voit les formules (180), (181), (182) se trouvent comprises dans la suivante

$$(183)\qquad m = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \int_{x_0}^{X}\left(\left(\psi(x,-\varepsilon)\right)\right) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\left(\psi(X,y)\right)\right) \\ -\int_{x_0}^{X}\left(\left(\psi(x,\varepsilon)\right)\right) - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\left(\psi(x_0,y)\right)\right) \end{array}\right\},$$

que l'on déduit immédiatement dans la formule (172), en posant $y_0 = -\varepsilon$, $Y = \varepsilon$, et qui donne le nombre m des racines réelles de l'équation (45) comprises entre les limites x_0, X.

Les valeurs de m que déterminent les formules (181), (182) sont équivalentes à celles que l'on déduirait de la formule (172) en réduisant r_0 à zéro, et posant

$$p_0 = -\varepsilon,\quad P = \varepsilon,$$

ou

$$p_0 = \pi - \varepsilon,\quad P = \pi + \varepsilon.$$

Par conséquent le nombre des racines positives inférieures à R est encore donné par l'équation

$$(184)\qquad m = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \int_0^R\left(\left(\psi(r\cos\varepsilon, -r\sin\varepsilon)\right)\right) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\left(\psi(R\cos p, R\sin p)\right)\right) \\ -\int_0^R\left(\left(\psi(r\cos\varepsilon, r\sin\varepsilon)\right)\right) \end{array}\right\},$$

et le nombre des racines négatives dont les valeurs numériques sont inférieures à R par l'équation

$$m = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \int_0^R\left(\left(\psi(-r\cos\varepsilon, r\sin\varepsilon)\right)\right) + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\left(\left(\psi(R\cos p, R\sin p)\right)\right) \\ -\int_0^R\left(\left(\psi(-r\cos\varepsilon, -r\sin\varepsilon)\right)\right) \end{array}\right\},$$

ou, ce qui revient au même, par la suivante

$$(185)\qquad m = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \int_0^R\left(\left(\psi(-r\cos\varepsilon, r\sin\varepsilon)\right)\right) - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\left(\psi(-R\cos p, -R\sin p)\right)\right) \\ -\int_0^R\left(\left(\psi(-r\cos\varepsilon, -r\sin\varepsilon)\right)\right) \end{array}\right\}.$$

En ajoutant les seconds membres des formules (184), (185), on reproduirait le nombre total des racines réelles de l'équation (45), ou du moins de celles dont la valeur numérique est inférieure à R.

Lorsque, la fonction $f(z)$ se présentant sous une forme réelle,

l'équation

(186) $$f(x) = 0$$

n'offre pas de racines réelles également entre elles, cette même équation n'a pas non plus de racine qui lui soit commune avec la suivante

(187) $$f'(x) = 0,$$

et par conséquent $f'(x)$ ne s'évanouit pas lorsqu'on attribue à x des valeurs réelles qui font évanouir $f(x)$. Il est aisé d'en conclure que la valeur de $\psi(x,y)$, déterminée par la formule (184), pourra, dans les formules (183), (184), (185), où la quantité $y = r\sin p$ devient infiniment petite, être remplacée par cette autre valeur

(188) $$\psi(x,y) = \frac{y f'(x)}{f(x)}.$$

Cela posé, le nombre m des racines réelles de l'équation (186), déduit de la formule (183), sera, dans l'hypothèse admise,

(189) $$m = \int_0^R \left(\!\!\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)\!\!\right),$$

tandis que l'on tirera des formules (184), (185)

$$m = \int_0^R \left(\!\!\left(\frac{r f'(r\cos z)}{f(r\cos z)} \right)\!\!\right), \qquad m = -\int_0^R \left(\!\!\left(\frac{r f'(-r\cos z)}{f(-r\cos z)} \right)\!\!\right),$$

ou, ce qui revient au même,

(190) $$m = \int_0^R \left(\!\!\left(\frac{x f'(x)}{f(x)} \right)\!\!\right), \qquad (191) \qquad m = -\int_{-R}^0 \left(\!\!\left(\frac{x f'(x)}{f(x)} \right)\!\!\right).$$

Si l'on retranche la dernière valeur de m de l'avant-dernière, la différence que j'appellerai μ sera

(192) $$\mu = \int_{-R}^{R} \left(\!\!\left(\frac{x f'(x)}{f(x)} \right)\!\!\right),$$

et représentera l'excès du nombre des racines positives sur le nombre des racines négatives, en supposant que l'on considère seulement les racines dont les modules sont inférieurs à R. Au reste, pour établir directement les formules (189), (192), il suffit d'observer

que, si l'on nomme a une racine réelle simple de l'équation (186), on aura, en prenant pour ε un nombre infiniment petit,

$$\frac{f'(a+\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)} = \frac{f'(a)}{\varepsilon f'(a)} = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \frac{f'(a-\varepsilon)}{f(a-\varepsilon)} = -\frac{1}{\varepsilon},$$

et qu'en conséquence, en venant à croître, la fonction

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \tag{193}$$

passera, en devenant infinie, du positif au négatif. Si l'équation (186) admettait un nombre i de racines égales ayant a pour valeur commune, on trouverait

$$\frac{f'(a+\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)} = \frac{\frac{\varepsilon^{i-1}}{1.2...(i-1)} f^{(i)}(a)}{\frac{\varepsilon^i}{1.2...i} f^{(i)}(a)} = \frac{i}{\varepsilon}, \qquad \frac{f'(a-\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)} = -\frac{i}{\varepsilon}.$$

Donc, en devenant infinie, la fonction (193) passerait encore du négatif au positif. On doit en conclure que généralement la valeur de m déterminée par la formule (189) représente toujours le nombre total des racines réelles de l'équation (186) renfermées entre les limites x_0, X, mais seulement le nombre de celles qui, étant comprises entre ces limites, sont distinctes les unes des autres. De même, la valeur de m_1 déterminée par la formule (192) représentera généralement la différence entre le nombre des racines positives distinctes et le nombre des racines négatives distinctes, si l'on se borne à considérer celles des racines positives et négatives qui offrent des valeurs numériques inférieures à R.

Revenons maintenant aux formules (95) et (94). De ces formules comparées entre elles il résulte que, le contour $OO'O''$ étant quelconque, et la lettre c désignant le périmètre de ce contour, on aura

(194) $$\mathcal{J}_0^c\left(\left(f(s)\right)\right) = -\mathcal{J}_0^c\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right).$$

Or il est facile de généraliser la formule (194), et d'établir la proposition suivante.

6e Théorème. $f(s)$ désignant une fonction réelle de s, qui obtienne toujours une valeur unique et déterminée entre les limites

$$s = s_0, \quad s = s_1,$$

et s_0 étant $< s_1$, la somme des deux indices

(195) $$\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(f(s)\right)\right), \quad \mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right)$$

sera équivalente à $+1$, à -1, ou à zéro, suivant que les deux quantités

(196) $$f(s_1), \qquad -f(s_0)$$

seront toutes deux négatives, ou toutes deux positives, ou l'une positive et l'autre négative, ensorte qu'on aura

(197) $$\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(f(s)\right)\right) + \mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right) = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{J}\frac{f(s_1)}{((s))} - \mathcal{J}\frac{f(s_0)}{((s))}\right\}.$$

Démonstration. En effet, si l'on applique à la détermination des intégrales équivalentes

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{f'(s)\sqrt{-1}}{1+f(s)\sqrt{-1}}\,ds, \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{f'(s)}{f(s)-\sqrt{-1}}\,ds$$

les raisonnements dont nous avons fait usage pour établir les formules (70), (71), (83), on trouvera immédiatement

(198) $$\int_{s_0}^{s_1} \frac{f'(s)\sqrt{-1}}{1+f(s)\sqrt{-1}}\,ds = 1\left[1+f(s_1)\sqrt{-1}\right] - 1\left[1+f(s_0)\sqrt{-1}\right] - 2\sqrt{-1}\,\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(f(s)\right)\right),$$

et

$$(199)\quad \int_{s_0}^{s_1} \frac{f'(s)}{f(s)-\sqrt{-1}}\,ds = 1\left[\pm\{f(s_1)-\sqrt{-1}\}\right] - 1\left[\pm\{f(s_0)-\sqrt{-1}\}\right] + \pi\sqrt{-1}\, J_{s_0}^{s_1}\left(\!\left(\frac{1}{f(s)}\right)\!\right),$$

chacun des doubles signes devant être réduit au signe + ou au signe −, et cette réduction devant toujours être effectuée de manière que la partie réelle de l'expression affectée du double signe devienne positive. Or, sous cette condition, la différence

$$1\left\{1+f(s_1)\sqrt{-1}\right\} - 1\left\{\pm\left[f(s_1)-\sqrt{-1}\right]\right\}.$$

se réduira tantôt à

$$1(\sqrt{-1}) = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1},$$

tantôt à

$$1(-\sqrt{-1}) = -\frac{\pi}{2}\sqrt{-1},$$

suivant que $f(s)$ sera une quantité positive ou négative, ensorte qu'on aura

$$(200)\quad 1\left\{1+f(s_1)\sqrt{-1}\right\} - 1\left\{\pm\left[f(s_1)-\sqrt{-1}\right]\right\} = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\, J\frac{f(s_1)}{(\!(s)\!)}.$$

On trouvera de même

$$(201)\quad 1\left\{1+f(s_0)\sqrt{-1}\right\} - 1\left\{\pm\left[f(s_0)-\sqrt{-1}\right]\right\} = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\, J\frac{f(s_0)}{(\!(s)\!)}.$$

Donc, si de la formule (198) on retranche la formule (199), on en conclura en divisant les deux membres par $\pi\sqrt{-1}$

$$(202)\quad J_{s_0}^{s_1}\left(\!\left(f(s)\right)\!\right) + J_{s_0}^{s_1}\left(\!\left(\frac{1}{f(s)}\right)\!\right) - \frac{1}{2}\left\{J\frac{f(s_1)}{(\!(s)\!)} - J\frac{f(s_0)}{(\!(s)\!)}\right\} = 0.$$

Or l'équation (202), qu'on peut encore écrire comme il suit

$$(203)\quad J_{s_0}^{s_1}\left(\!\left(f(s)\right)\!\right) = -J_{s_0}^{s_1}\left(\!\left(\frac{1}{f(s)}\right)\!\right) + \frac{1}{2}\left\{J\frac{f(s_1)}{(\!(s)\!)} - J\frac{f(s_0)}{(\!(s)\!)}\right\}$$

ne diffère pas de la formule (197).

Si, à l'aide de l'équation (203), on transforme les seconds mem-

-bres des équations (198), (199), elles deviendront respectivement

$$(204) \qquad \alpha = -\int_{x_0}^{X} \left(\left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right] \right) + \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{f(X)}{[\![x]\!] f'(X)} - \int \frac{f(x_0)}{[\![x]\!] f'(x_0)} \right\},$$

et

$$(205) \qquad \mu = -\int_{-R}^{R} \left(\left[\frac{f(x)}{x f'(x)} \right] \right) + \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{f(R)}{[\![x]\!] f'(R)} + \int \frac{f(-R)}{[\![x]\!] f'(-R)} \right\}.$$

Si d'ailleurs le rapport

$$\frac{f(R)}{f'(R)}$$

change de signe, quand on y remplace R par $-R$, en sorte qu'on ait

$$(206) \qquad \frac{f(R)}{f'(R)} + \frac{f(-R)}{f'(-R)} = 0,$$

la formule (205) sera réduite à

$$(207) \qquad \mu = -\int_{-R}^{R} \left(\left[\frac{f(x)}{x f'(x)} \right] \right).$$

Les formules (204), (205), qu'on pourrait encore déduire des équations (180), (184), (185) jointes à la formule (169), renferment deux théorèmes dignes de remarque, dont voici l'énoncé.

2e Théorème. Si la fonction réelle $f(x)$ reste finie et continue entre les limites $x = x_0$, $x = X$, pour savoir combien l'équation

$$f(x) = 0$$

a de racines réelles différentes comprises entre ces limites, il suffira de chercher la différence entre les deux nombres qui indiquent la première combien de fois, pour des valeurs croissantes de x renfermées entre les limites x_0, X, la fonction

$$(208) \qquad \frac{f(x)}{f'(x)}$$

passe, en devenant infinie, du négatif au positif, le second, combien de fois cette fonction passe, en devenant infinie, du négatif au positif puis

d'ajouter à cette différence 1, −1 ou zéro, suivant que les deux quantités

$$\frac{f(X)}{F'(X)}, \quad -\frac{f(x_0)}{F'(x_0)} \tag{209}$$

seront toutes deux négatives ou toutes deux positives, ou l'une positive et l'autre négative.

8me Théorème. Si la fonction réelle $f(x)$ reste finie et continue entre les limites $x = x_0$, $x = X$, pour déterminer la différence entre le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation (186), qui, étant différentes les unes des autres, offrent des modules inférieurs à R, il suffira de chercher la différence entre les deux nombres qui indiquent le premier combien de fois pour des valeurs croissantes de x renfermées entre les limites x_0, X, la fonction

$$\frac{f(x)}{xF'(x)} \tag{210}$$

passe, en devenant infinie, du positif au négatif, le second combien de fois cette fonction passe, en devenant infinie, du négatif au positif, puis d'ajouter à cette différence 1, −1, ou zéro, suivant que les deux quantités

$$\frac{f(R)}{F'(R)}, \quad \frac{f(-R)}{F'(-R)} \tag{211}$$

seront toutes deux positives ou toutes deux négatives ou l'une positive et l'autre négative.

Le théorème 7, appliqué aux équations algébriques a été donné pour la première fois, par l'abbé Degua, dans les mémoires de l'Académie Royale des Sciences. J'ai donné pour les mêmes équations, en supposant $R = \infty$, le théorème 8 dans le journal de l'école Polytechnique; et, en portant de ce

théorème, j'ai l'honneur de le premier que, pour toute équation algébrique on peut trouver des fonctions rationnelles des coefficients dont les signes fournissent le moyen de déterminer le nombre des racines réelles positives, et le nombre des racines réelles négatives.

En posant dans le théorème $x=0$, $X=\infty$, on en conclut que le nombre des racines positives d'une équation algébrique ne peut surpasser le nombre des racines positives de l'équation dérivée que d'une seule unité et dans le cas seulement où le terme constant et le coefficient de la première puissance de la variable sont affectés de signes contraires. En remplaçant x par $-x$, on en conclut que le nombre des racines négatives de la proposée ne peut surpasser le nombre des racines négatives de la dérivée que d'une seule unité et dans le cas seulement où le terme constant et le coefficient de la première puissance de la variable sont affectés du même signe. De cette observation on déduit immédiatement le théorème de Descartes, en vertu duquel le nombre des racines positives d'une équation algébrique est égal ou inférieur au nombre des variations de signe que le premier membre peut offrir, et le nombre des racines négatives égal ou inférieur au nombre des permanences de signe. Si les coefficients des puissances de la variable d'un degré inférieur à celui de l'équation donnée se réduisent à zéro, il suffira, pour qu'ils cessent de l'évanouir, de remplacer x par $x+\varepsilon$, ε désignant un nombre infiniment petit, et l'on prouvera aisément de cette manière que, dans l'application du théorème de Descartes on peut ne tenir aucun compte des termes qui disparaissent, quand il s'agit d'évaluer le nombre total

des variations de signe.

Il résulte encore du théorème 7e que le nombre des racines réelles d'une équation algébrique, comprises entre deux limites données x_0, X, ne peut surpasser le nombre des racines réelles de la dérivée comprises entre les mêmes limites que d'une seule unité et dans le cas seulement où des deux rapports

$$\frac{f(X)}{f'(X)}, \quad \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{21e}$$

le premier est positif, le second négatif, c'est à dire, dans le cas où, en remplaçant x par $x+z$, on obtient une transformée en z, dans laquelle le terme indépendant de z et le terme proportionnel à z sont affectés de signes contraires ou de même signe suivant que l'on suppose $x = x_0$ ou $x = X$. Il est aisé d'en conclure que le nombre des racines réelles comprises entre les limites x_0, X est toujours égal ou inférieur au nombre des variations de signe que perd la transformée en z quand on passe de la supposition $x = x_0 + z$ à la supposition $x = X + z$. Cette conclusion renferme le théorème que M. Budan a donné dans un mémoire publié en 1806, et que l'on retrouve dans l'ouvrage posthume de M. Fourier, qui a pour titre Analyse des équations déterminées. Remarquons en outre qu'en suivant pour démontrer ce théorème et celui de Descartes la méthode ci-dessus indiquée on suppose tacitement les racines réelles de l'équation (18C) simples et distinctes les unes des autres. Mais, pour faire voir que les mêmes théorèmes s'étendent au cas où l'équation (18C) offre des racines égales, il suffit de substituer à la formule (20d) celle qu'on déduirait de l'équation (18D) combinée avec les

équations (164) et (203), oubien encore d'attribuer aux racines réelles qui seraient égales entre elles des accroissements infiniment petits et inégaux de manière à rendre toutes les racines réelles distinctes. Car, en opérant ainsi, on n'altérerait qu'infiniment peu les coefficients positifs ou négatifs de l'équation en x ou de sa transformée en z; et par conséquent on n'altérerait pas ces signes de ces coefficients. Ajoutons que, si, dans les équations en x et z dont il s'agit, quelques uns des coefficients se réduisaient à zéro, il faudrait remplacer x, x_0 et X par $x+\varepsilon$, $x_0+\varepsilon$ et $X+\varepsilon$, le nombre ε étant lui même infiniment petit, et choisir ensuite les accroissements infiniment petits des racines de manière qu'ils pussent être négligés vis à vis de ε et des puissances de ε que l'on aurait à considérer. On pourrait, par exemple, supposer ces accroissements proportionnels à une puissance de ε dont l'exposant surpassait le degré de l'équation donnée.

Cela posé, la formule (209) fournit le moyen de déterminer très facilement l'indice

$$\mathcal{I}_{S_0}^{S_1}\big((f(S))\big)$$

toutes les fois que la fonction $f(S)$ se réduit à une fraction rationnelle. En effet supposons

$$f(S) = \frac{\Phi(S)}{\Phi_1(S)} \tag{212}$$

$\Phi(S)$, $\Phi_1(S)$ étant deux fonctions entières et réelles de S. Si $\Phi(S)$ est constamment divisible par $\Phi_1(S)$, on pourra réduire $f(S)$ à un polynome entier, et par suite on aura

$$(213) \qquad \mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(f(s)\right)\right) = 0.$$

Si au contraire, $\Phi(s)$ n'étant pas exactement divisible par $\Phi_1(s)$, on nomme

$\Phi_2(s)$ le reste de la division de $\Phi(s)$ par $\Phi_1(s)$,

$\Phi_3(s)$ le reste de la division de $\Phi_1(s)$ par $\Phi_2(s)$,

$\Phi_4(s)$ le reste de la division de $\Phi_2(s)$ par $\Phi_3(s)$,

etc....

la dernière des fonctions

$$\Phi(s), \quad \Phi_1(s), \quad \Phi_2(s), \quad \Phi_3(s), \quad \Phi_4(s), \quad \text{etc...}$$

que je désignerai par

$$\Phi_i(s)$$

sera le plus grand commun diviseur des deux polynomes

$$\Phi(s), \quad \Phi_1(s),$$

et se réduira, si ces polynomes n'ont pas de commun diviseur à une quantité constante. Alors aussi l'on aura évidemment

$$(214) \qquad \mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right) = \mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_2(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right),$$

et l'on tirera de la formule (214) jointe à la formule (209)

$$(215) \quad \left\{\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right) = -\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)}\right)\right) + \frac{1}{2}\left\{\mathcal{J}\frac{\Phi_1(s_1)}{((s))\Phi_2(s_1)} - \mathcal{J}\frac{\Phi_2(s_0)}{((s))\Phi_2(s_0)}\right\}. \text{ On aura de même}\\
&\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)}\right)\right) = -\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_2(s)}{\Phi_3(s)}\right)\right) + \frac{1}{2}\left\{\mathcal{J}\frac{\Phi_2(s_1)}{((s))\Phi_3(s_1)} - \mathcal{J}\frac{\Phi_2(s_0)}{((s))\Phi_3(s_0)}\right\},\\
&\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_2(s)}{\Phi_3(s)}\right)\right) = -\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_3(s)}{\Phi_4(s)}\right)\right) + \frac{1}{2}\left\{\mathcal{J}\frac{\Phi_3(s_1)}{((s))\Phi_4(s_1)} - \mathcal{J}\frac{\Phi_3(s_0)}{((s))\Phi_4(s_0)}\right\},\\
&\text{etc....}\\
&\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_{i-2}(s)}{\Phi_{i-1}(s)}\right)\right) = -\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_{i-1}(s)}{\Phi_i(s)}\right)\right) + \frac{1}{2}\left\{\mathcal{J}\frac{\Phi_{i-1}(s_1)}{((s))\Phi_i(s_1)} - \mathcal{J}\frac{\Phi_{i-1}(s_0)}{((s))\Phi_i(s_0)}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Enfin, $\Phi_i(\sigma)$, étant le plus grand commun diviseur algébrique des deux fonctions $\Phi(\sigma)$, $\Phi_1(\sigma)$, diviseur $\Phi_{i-1}(\sigma)$, et l'on aura par suite

$$\mathcal{J}_{\sigma_0}^{\sigma_1}\left(\!\!\left(\frac{\Phi_{i-1}(\sigma)}{\Phi_i(\sigma)}\right)\!\!\right) = 0. \tag{216}$$

Cela posé, il est clair que la formule (215), multipliée alternativement par les facteurs $+1$ et -1, puis ajoutée entre elles, on conclura définitivement

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\sigma_0}^{\sigma_1}\left(\!\!\left(\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi_1(\sigma)}\right)\!\!\right) = {}& \frac{1}{2}\left\{\mathcal{J}\frac{\Phi_1(\sigma_1)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_1(\sigma_1)} - \mathcal{J}\frac{\Phi_2(\sigma_1)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_0(\sigma_1)} + \cdots\cdots + (-1)^i\,\mathcal{J}\frac{\Phi_{i-1}(\sigma_1)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_i(\sigma_1)}\right\} \\ & - \frac{1}{2}\left\{\mathcal{J}\frac{\Phi_1(\sigma_0)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_2(\sigma_0)} - \mathcal{J}\frac{\Phi_2(\sigma_0)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_0(\sigma_0)} + \cdots\cdots + (-1)^i\,\mathcal{J}\frac{\Phi_{i-1}(\sigma_0)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_i(\sigma_0)}\right\}.\end{aligned} \tag{217}$$

Si l'on voulait obtenir la valeur de

$$\mathcal{J}_{\sigma_0}^{\sigma_1}\left(\!\!\left(\frac{\Phi_1(\sigma)}{\Phi(\sigma)}\right)\!\!\right),$$

le degré de $\Phi(\sigma)$ étant supérieur à celui de $\Phi_1(\sigma)$, alors aux formules (215) il faudrait joindre la suivante

$$\mathcal{J}_{\sigma_0}^{\sigma_1}\left(\!\!\left(\frac{\Phi_1(\sigma)}{\Phi(\sigma)}\right)\!\!\right) = -\mathcal{J}_{\sigma_0}^{\sigma_1}\left(\!\!\left(\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi_1(\sigma)}\right)\!\!\right) + \frac{1}{2}\left\{\mathcal{J}\frac{\Phi_1(\sigma_1)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_1(\sigma_1)} - \mathcal{J}\frac{\Phi(\sigma_0)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_1(\sigma_0)}\right\}, \tag{218}$$

et l'on aurait par suite

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\sigma_0}^{\sigma_1}\left(\!\!\left(\frac{\Phi_1(\sigma)}{\Phi(\sigma)}\right)\!\!\right) = {}& \frac{1}{2}\left\{\mathcal{J}\frac{\Phi(\sigma_1)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_1(\sigma_1)} - \mathcal{J}\frac{\Phi_1(\sigma_1)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_2(\sigma_1)} + \cdots\cdots - (-1)^i\,\mathcal{J}\frac{\Phi_{i-1}(\sigma_1)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_i(\sigma_1)}\right\} \\ & - \frac{1}{2}\left\{\mathcal{J}\frac{\Phi(\sigma_0)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_1(\sigma_0)} - \mathcal{J}\frac{\Phi_1(\sigma_0)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_2(\sigma_0)} + \cdots\cdots - (-1)^i\,\mathcal{J}\frac{\Phi_{i-1}(\sigma_0)}{(\!(\sigma)\!)\,\Phi_i(\sigma_0)}\right\}.\end{aligned} \tag{219}$$

Si Laplace se voulait calculer la valeur de

$$\mathcal{J}_{\sigma_0}^{\sigma_1}\left(\!\!\left(\frac{\sigma\Phi_1(\sigma)}{\Phi(\sigma)}\right)\!\!\right), \tag{220}$$

on pourrait y parvenir tout immédiatement, en substituant la fonction $\sigma\Phi_1(\sigma)$ à la fonction $\Phi(\sigma)$ dans la formule (219), soit en combinant l'équation

(207) avec d'autres équations de l'une des formes

$$\int_{s_0}^{s_1} \left(\left(\frac{s\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)} \right) \right) = \int_{s_0}^{s_1} \left(\left(\frac{s\Phi_2(s)}{\Phi_2(s)} \right) \right), \tag{221}$$

$$\int_{s_0}^{s_1} \left(\left(\frac{\Phi(s)}{s\Phi_1(s)} \right) \right) - \int_{s_0}^{s_1} \frac{\Phi(0)}{s\,((s))\,\Phi_1(0)} = \int_{s_0}^{s_1} \left(\left(\frac{\Phi_2(s)}{s\Phi_1(s)} \right) \right) - \int_{s_0}^{s_1} \frac{\Phi_2(0)}{((s))\,\Phi_1(0)}. \tag{222}$$

Lorsque $f(x)$ est un polynome entier, il suffit de remplacer dans la formule (219) la variable s par la variable x, et les fonctions $\Phi(s)$, $\Phi_1(s)$ par les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, pour obtenir le nombre entier m que détermine l'équation (149), c'est-à-dire le nombre des racines réelles et distinctes de l'équation

$$f(x) = 0,$$

comprises entre les limites $x = x_0$, $x = X$. On retrouve ainsi ramené au théorème que M. Ch. Sturm a donné dans un mémoire présenté à l'Académie Royale des Sciences le 28 mai 1829.

Observons encore que, si la fonction $f(z)$ est algébrique, on pourra calculer, à l'aide de la formule (217), la valeur de m fournie par les équations (172), (179), (174), (178), (176), (177), (178), (179), etc... et pareillement le nombre des racines de l'équation

$$f(z) = 0,$$

qui correspondent à des points renfermés dans un rectangle, ou dans un secteur circulaire, etc.... En effet, dans le cas dont il s'agit, la valeur de $\psi(x, y)$, déterminée par la formule (163), (164) ou (165), sera évidemment une fonction rationnelle de chacune des variables x, y; et, si l'on pose

$$\operatorname{tang} \frac{p}{2} = t, \tag{225}$$

la valeur de

$$\psi(r\cos p, r\sin p),$$

déterminée par la formule (171), sera encore une fonction rationnelle

non seulement de la variable r, mais aussi de la variable t. Il y a plus : à l'aide des formules (85) ou (94), (142), (147) et (217) ou (219), on pourra calculer immédiatement le nombre n des racines réelles de l'équation

$$f(z) = 0$$

correspondantes à des points renfermés dans le contour $00'0''\ldots$, toutes les fois que ce contour sera seulement composé de lignes droites et d'arcs de cercle. En effet, en vertu de ces formules, on pourra décomposer le nombre cherché

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \| \varphi(s) \|$$

en plusieurs parties de la forme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^{s_1} \| \varphi(s) \|$$

correspondantes aux diverses portions du contour $00'0''\ldots$. D'autre part, la fonction $f(z)$ étant algébrique par hypothèse, $\varphi(s)$, ou le rapport entre le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans $f(z)$ et la partie réelle prise avec le signe $-$, sera une fonction rationnelle de x, y. Or, pour chacune des portions droites du contour $00'0''\ldots$, les variables x, y, s seront liées entre elles par des équations du premier degré ; par conséquent $\varphi(s)$ deviendra une fonction rationnelle de s, et pourra encore être remplacé par une fonction rationnelle de x ou de y. Enfin, si dans le contour $00'0''\ldots$ on considère une portion circulaire qui soit précisément un arc de cercle décrit avec un rayon donné ϱ, x, y deviendront des fonctions linéaires de

$$\cos\frac{s - s_0}{\varrho} \quad \text{et} \quad \sin\frac{s - s_0}{\varrho},$$

s_0 désignant la valeur de s qui correspond à l'origine de cet arc. Donc, si l'on pose

$$\tan\frac{s - s_0}{2\varrho} = t, \tag{226}$$

$\varphi(s)$ se transformera, pour la portion dont il s'agit, en une fonction ratio-

ouvelle de t. Ainsi, dans tous les cas, lorsque la fonction $f(z)$ sera algébrique, et le contour $OO'O''\ldots$ uniquement composé de droites ou d'arcs de cercle, la détermination du nombre des racines de l'équation

$$f(z) = 0$$

correspondantes à des points renfermés dans ce contour pourra être réduite à la détermination des indices de fractions rationnelles; ou, ce qui revient au même, au égard à la formule (217), à la recherche du plus grand commun diviseur algébrique pour les fonctions entières d'une seule variable.

Généralement, si le contour $OO'O''\ldots$ est composé de plusieurs portions définies d'une manière telle que l'abscisse x et l'ordonnée y de chacune d'elles puissent être représentées par des fonctions rationnelles d'une troisième variable t, la détermination du nombre m des racines correspondantes à des points renfermés dans ce contour se ramènera immédiatement au calcul des indices de plusieurs fonctions rationnelles de t; et, si, pour chaque portion du contour $OO'O''\ldots$, la variable t croît ou décroît constamment, tandis que l'arc s augmente, alors, pour obtenir l'indice de la fraction rationnelle relative à une portion donnée, il suffira de chercher le plus grand commun diviseur algébrique des fonctions entières de t qui représentent les deux termes de cette fraction rationnelle, puis de substituer ces deux termes et les restes des divisions partielles aux fonctions désignées dans la formule (217) par

$$\Phi(s),\ \Phi_1(s),\ \Phi_2(s),\ \text{etc.}\ldots$$

Revenons maintenant à la condition (97), à laquelle il est souvent utile de recourir dans la théorie des équations algébriques ou transcendantes, attendu qu'on est assuré, quand cette condition se trouve remplie, que le nombre m des racines correspondantes à des points

renfermée dans le contour $00'0''\ldots$ restera la même pour les deux équations (45) et (100), ou

$$\Pi(z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Pi(z) + \Theta(z) = 0. \tag{225}$$

D'après ce qu'on a dit ci-dessus, si le contour $00'0''\ldots$ se réduit au rectangle formé par les droites que représentent les équations (11), la condition (97) sera vérifiée quand on aura en même temps

$$\begin{cases} \Lambda_{x_0}^{X} \dfrac{\Theta(x+y_0\sqrt{-1})}{\Pi(x+y_0\sqrt{-1})} < 1, & \Lambda_{y_0}^{Y} \dfrac{\Theta(X+y\sqrt{-1})}{\Pi(X+y\sqrt{-1})} < 1, \\ \Lambda_{x_0}^{X} \dfrac{\Theta(x+Y\sqrt{-1})}{\Pi(x+Y\sqrt{-1})} < 1, & \Lambda_{y_0}^{Y} \dfrac{\Theta(x_0+y\sqrt{-1})}{\Pi(x_0+y\sqrt{-1})} < 1. \end{cases} \tag{226}$$

Alors le nombre m sera celui des racines dont les quelles la partie réelle est comprise entre les limites x_0, X, et le coefficient de $\sqrt{-1}$ entre les limites y_0, Y. Si le contour $00'0''\ldots$ se réduit au système des deux droites et des deux arcs de cercle représentés par les équations (90), la condition (97) sera vérifiée quand on aura

$$\begin{cases} \Lambda_{r_0}^{R} \dfrac{\Theta(r a^{p_0\sqrt{-1}})}{\Pi(r a^{p_0\sqrt{-1}})} < 1, & \Lambda_{p_0}^{P} \dfrac{\Theta(R a^{p\sqrt{-1}})}{\Pi(R a^{p\sqrt{-1}})} < 1, \\ \Lambda_{r_0}^{R} \dfrac{\Theta(r a^{P\sqrt{-1}})}{\Pi(r a^{P\sqrt{-1}})} < 1, & \Lambda_{p_0}^{P} \dfrac{\Theta(r_0 a^{p\sqrt{-1}})}{\Pi(r_0 a^{p\sqrt{-1}})} < 1; \end{cases} \tag{227}$$

et alors le nombre m sera celui des racines pour les quelles le modules r est compris entre les limites r_0, R, et l'angle p entre les limites p_0, P. Si le contour $00b''\ldots$ se réduisait à la circonférence du cercle décrit avec le rayon R, les conditions (227) devraient être remplacées par une seule, savoir

$$\Lambda_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(R a^{p\sqrt{-1}})}{\Pi(R a^{p\sqrt{-1}})} < 1, \tag{228}$$

et le nombre m serait celui des racines qui offrent un modules inférieur à R.

Lorsqu'on pose successivement

$$\Pi(z) = z, \quad \Pi(z) = z^m,$$

m désignant un nombre entier quelconque, la condition (228) se transforme en ces deux autres

$$\frac{\Lambda_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{B}(Re^{p\sqrt{-1}})}{R} < 1, \tag{229}$$

$$\frac{\Lambda_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{B}(Re^{p\sqrt{-1}})}{R^m} < 1, \tag{230}$$

qu'on peut également déduire des formules (134) et (134 bis). Si d'ailleurs la fonction $\mathfrak{B}(z)$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de z, en sorte qu'on ait

$$\mathfrak{B}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \tag{231}$$

et, si l'on nomme

$$A_0, \ A_1, \ A_2, \dots$$

les valeurs numériques ou les modules des coefficients réels ou imaginaires

$$a_0, \ a_1, \ a_2, \dots$$

on trouvera

$$\Lambda_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{B}(Re^{p\sqrt{-1}}) = \text{ou} < A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + \dots \tag{232}$$

Par conséquent la condition (229) ou (230) sera vérifiée, si l'on a

$$\frac{A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + \dots}{R} < 1, \tag{233}$$

ou

$$\frac{A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + \dots}{R^m} < 1. \tag{234}$$

D'autre part, si le développement de $\mathfrak{B}(z)$ renferme tout à la fois des termes d'un degré inférieur et des termes d'un degré su-

- périeur à m, le rapport

(295) $$\frac{A_0+A_1R+A_2R^2+\cdots}{R^m} = A_0R^{-m}+R^{-m+1}+\cdots+A_{m-1}R^{-1}+A_m+A_{m+1}R+\text{etc...}$$

obtiendra une valeur infinie positive pour $R=0$, décroîtra ensuite pour des valeurs croissantes de R, et croîtra de nouveau indéfiniment, tandis que R s'approchera de la limite ∞ ou de la moins grande limite pour laquelle la série

(296) $$A_0,\ A_1R,\ A_2R^2,\ \text{etc...}$$

cesse d'être convergente. Donc, dans l'intervalle, ce rapport, qui varie avec R par degrés insensibles deviendra un minimum pour une certaine valeur de R. Or cette valeur de R pourra être aisément calculée. Car elle sera la racine positive unique de l'équation

(297) $$-mA_0R^{-m-1}-(m-1)A_1R^{-m}-\cdots-A_{m-1}R^{-2}+A_{m+1}+A_{m+2}R+\cdots=0,$$

dont le premier membre croîtra sans cesse avec R. Si l'on suppose en particulier $m=1$, l'équation (297), réduite à

(298) $$\frac{A_0}{R^2}-A_2-A_3R-\text{etc...}=0,$$

fournira la valeur de R correspondante à la valeur minimum du rapport

(299) $$\frac{A_0+A_1R+A_2R^2+\cdots}{R} = \frac{A_0}{R}+A_1+A_2R+\text{etc...}$$

Lorsqu'on posant

$$z=Re^{p\sqrt{-1}}$$

on peut choisir l'angle p de manière que l'on ait identiquement

(240) $$a_0+a_1z+a_2z^2+\text{etc...}=(A_0+A_1R+A_2R^2+\text{etc...})(\cos p+\sqrt{-1}\sin p),$$

r désignant un arc réel, la formule (202) se réduit à

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varpi(R e^{r\sqrt{-1}}) = A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + \text{etc...}, \tag{241}$$

et la valeur du rapport (209) ou (209), correspondante à la racine positive de l'équation (207) ou (208), est précisément le module principal de la fonction

$$\frac{\varpi(z)}{2\pi} \quad \text{ou} \quad \frac{\varpi(z)}{z}.$$

C'est ce qui arrivera en particulier, si les coefficients

$$a_0, a_1, a_2, \text{etc...}$$

sont des quantités réelles de même signe ou alternativement positives et négatives, puisqu'on vérifiera la formule (240), dans le premier cas, en posant

$$z = R, \quad r = 0 \text{ ou } \pi,$$

dans le second cas en posant

$$z = -R, \quad r = 0 \text{ ou } \pi.$$

Concevons, pour fixer les idées, que l'on pose

$$\varpi(z) = \alpha \cosh z,$$

α étant un coefficient réel et positif. L'équation (208), réduite à

$$1 = \frac{R^2}{2} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{R^4}{4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{R^6}{6} + \text{etc...}, \tag{242}$$

admettra une seule racine positive, savoir

$$R = 1,199674\ldots, \tag{240}$$

et le module principal de la fonction

$$\frac{\varpi(z)}{z} = \frac{\alpha \cosh z}{z}$$

sera

$$\frac{\alpha}{0,662742\ldots} \tag{244}$$

Donc la racine z de l'équation

(245) $$z - \alpha \cos z = 0,$$

et la fonction de cette racine seront développables en séries convergentes par la formule de Lagrange, tant que l'on aura

(246) $$\alpha < 0,662743\ldots,$$

ce que l'on savait déjà.

Concevons maintenant que, dans les théorèmes 1 et 2, on réduise $f(z)$ à une fonction entière de z, entendant qu'on ait

(247) $$f(z) = z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

m désignant un nombre entier quelconque : alors, aujourd'hui pour $F(z)$ un des termes dont cette fonction entière se compose, on établira sans peine la proposition suivante

2e Théorème. Soit

(248) $$z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

une équation en z de degré m, dans laquelle les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_{m-1}$ peuvent être réels ou imaginaires. Si, pour un certain module R attribué à la variable z, le module d'un terme devient supérieur à la somme des modules de tous les autres, l'exposant de z dans ce terme sera précisément le nombre des racines de l'équation (248) qui offrent des modules inférieurs à R ; et l'on calculera sans peine, à l'aide de séries convergentes, les coefficients d'une nouvelle équation qui n'aura pas d'autres racines que celles dont il s'agit.

Démonstration. En effet soient

$$A_0, A_1, \ldots\ldots A_{m-1}$$

les valeurs numériques ou modules des coefficients

$$a_0, a_1, \ldots\ldots a_{m-1},$$

et supposons que, pour le module R de z, le module $A_k R^k$ du terme $a_k z^k$ devienne supérieur à la somme des modules, à plus forte raison, au module de la somme de tous les autres termes, en sorte qu'on ait

$$A_k R^k > A_0 + A_1 R + \cdots + A_{k-1} R^{k-1} + A_{k+1} R^{k+1} + \cdots + A_{n-1} R^{n-1} + R^n. \tag{249}$$

Si l'on décrit le contour $OO'O''\ldots$ du cercle décrit de l'origine des coordonnées avec le rayon R, et si l'on pose

$$\Pi(z) = a_k z^k,$$

le nombre des racines de l'équation (244) qui offriront des modules inférieurs à R sera, suivant le 2e théorème, égal au nombre des racines de l'équation

$$z^k = 0. \tag{250}$$

Si d'ailleurs on désigne les premières par

$$z_1, z_2, \ldots z_k, \tag{251}$$

on pourra, en vertu du théorème 5, calculer à l'aide des séries convergentes les sommes

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + \cdots + z_k, \\ z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2, \\ \text{etc...} \\ z_1^k + z_2^k + \cdots + z_k^k, \end{cases} \tag{252}$$

et par suite les coefficients de l'équation qui n'auront pas d'autres racines que $z_1, z_2, \ldots z_k$. On pourra d'ailleurs, à l'aide des formules (118) ou (120), fixer les limites des erreurs commises dans le calcul numérique des sommes (252).

Corollaire 1er. Comme la différence

$$R^n - (A_0 + A_1 R + \cdots + A_{n-1} R^{n-1}) = R^n \left(1 - \frac{A_{n-1}}{R} - \cdots - \frac{A_1}{R^{n-1}} - \frac{A_0}{R^n}\right)$$

est évidemment positive, lorsque le nombre R, supposé de valeur positive

unique de l'équation

$$1 = \frac{A_{m-1}}{R} + \cdots + \frac{A_1}{R^{m-1}} + \frac{A_0}{R^m}, \tag{254}$$

dont le second membre décroît sans cesse et passe d'une valeur infinie à une valeur nulle, tandis que l'on fait croître R entre les limites $R = 0$, $R = \infty$, il est clair que, si les modules de z deviennent supérieurs à cette racine, le module R^m du premier terme surpassera la somme des modules de tous les autres. Donc l'équation (248) admet toujours une racine réelle ou imaginaire dont chacune a pour module un nombre inférieur ou tout au plus égal à la racine positive unique de l'équation (254).

Corollaire 2e. Comme le module A_0 du terme constant surpasse la somme des modules de tous les autres termes, dès que le module R de z devient inférieur à la racine positive unique de l'équation

$$A_0 - A_1 R - A_2 R^2 - \cdots - A_{m-1} R^{m-1} - R^m = 0, \tag{255}$$

il suit du théorème 3e que toutes les racines de l'équation (248) offrent des modules supérieurs à la racine positive de l'équation (255).

Corollaire 3e. Lorsque, pour

$$z = R \quad \text{ou} \quad z = R e^{p\sqrt{-1}},$$

le module du terme $a_1 z$ surpasse la somme des modules de tous les autres, une substitution de l'équation (248) offre un module inférieur à R. Cette racine peut être immédiatement déterminée à l'aide de la formule

$$z = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2.3 \ldots n\, a_1^n} \frac{\partial^{n-1} (a_0 + a_2 z^2 + \cdots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m)^n}{\partial z^{n-1}}, \tag{256}$$

que l'on déduit de l'équation (127) en y remplaçant la fonction

$\varpi(2)$ par le rapport

$$\frac{a_0 + a_2 z^2 + \cdots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m}{a_1}, \tag{257}$$

et dans lequel z désigne un nombre infiniment petit que l'on doit réduire à zéro après les différentiations. Ajoutons que, si l'on borne à calculer les n premiers termes de la somme qui constitue le second membre de la formule (256), l'erreur commise ne surpassera pas la plus petite des valeurs qu'acquièrent les expressions (120) quand on suppose $c = 2\pi R$, c'est-à-dire, la plus petite des deux quantités

$$R\,\mathfrak{M}^{-1}\left(\frac{1}{1-\mathfrak{M}}\right), \qquad R\,\frac{\mathfrak{M}^m}{n(1-\mathfrak{M})}, \tag{258}$$

la valeur de $\mathfrak{M}$ étant

$$\mathfrak{M} = \lambda\,\frac{a_0 + a_2 z^2 + \cdots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m}{a_1 z}. \tag{259}$$

A plus forte raison, l'erreur commise ne surpassera pas la valeur des expressions (258) correspondantes à la valeur de $\mathfrak{M}$ déterminée par la formule

$$\mathfrak{M} = \frac{A_0 + A_2 R^2 + \cdots + A_{m-1} R^{m-1} + R^m}{A_1 R}. \tag{260}$$

Pour que la formule (256) soit applicable à la détermination d'une racine de l'équation (248), il suffit que la plus petite des valeurs de $\mathfrak{M}$ déduites de la formule (259), c'est-à-dire, le module principal de la fonction (257), soit inférieur à l'unité. Du reste, quand l'unité surpasse la valeur minimum du rapport qui forme le second membre de la formule (260), c'est-à-dire, la valeur correspondante à la racine positive unique de l'équation

$$A_0 = A_2 R^2 + 2A_3 R^3 + \cdots + (m-1) R^m, \tag{261}$$

on peut se borner à prendre pour R la racine dont il s'agit.

Pour montrer une application des formules qui précèdent, considérons en particulier l'équation

(262) $$z^5 + 10z - 1 = 0.$$

Comme, dans cette équation, le coefficient 10 de la première puissance de z surpasse la somme des valeurs numériques des autres coefficients 1 et 1, on peut affirmer qu'une seule racine offrira un module inférieur à l'unité. Pour déterminer cette racine à l'aide d'une série convergente, il suffira de recourir à la formule (256) ou

(263) $$z = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n2.3\ldots n}\left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{\partial^{n-1}(1-\varepsilon^5)^n}{\partial\varepsilon^{n-1}},$$

de laquelle on tirera

(264) $$z = \frac{1}{10}\left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \frac{10}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{10} - \frac{15.14}{2.3}\left(\frac{1}{10}\right)^{15} + \frac{20.19.18}{2.3.4}\left(\frac{1}{10}\right)^{20} - \text{etc.}\ldots\right\},$$

et par conséquent

(265) $$z = 0,0999990000499996500094\ldots$$

D'un autre côté, comme les formules (259), (260) donneront l'une et l'autre

$$M = \frac{1+R^5}{10R},$$

on pourra prendre pour M, et pour R, dans les formules (258), le module principal de la fonction

$$\frac{1-z^5}{10z},$$

et la valeur correspondante de R, c'est à dire la racine positive unique de l'équation (261) ou

$$1 = 4R^5.$$

On trouvera ainsi

$$R = \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}} = 0,7578\ldots, \quad \text{et} \quad M = 0,1649\ldots$$

Or, le second membre de la formule (265) étant la valeur approchée de z que fournit l'équation (263) quand on néglige dans la somme indiquée par le signe Σ le terme correspondant à $n \pm 26$ et ceux qui le suivent, l'erreur que l'on commettra en prenant pour z le nombre

$$0,0999990000 4\,99965000 94$$

composé de 22 chiffres décimaux sera plus petite que la seconde des expressions (258) ou le produit

$$\frac{0,7578\ldots}{26\,(0,8350\ldots)}\,(0,1649\ldots)^{26} = (0,0349\ldots)(0,1649\ldots)^{26}.$$

Or le logarithme décimal de ce produit étant

$$-22 + 0,1926\ldots$$

il en résulte que l'erreur commise sera inférieure à

$$\frac{1,6\ldots}{(10)^{22}}.$$

Par conséquent, dans le second membre de la formule (265), le 21e chiffre décimal est encore exact.

<u>Corollaire 4e</u>. Lorsque, pour

$$z = R, \quad \text{ou} \quad z = Re^{p\sqrt{-1}},$$

le module $A_2 R^2$ du terme $a_2 z^2$ surpasse la somme des modules de tous les autres, deux racines seulement de l'équation (248) offrent des modules inférieurs à R. Si l'on nomme z_1, z_2 ces deux racines, leur somme et la somme de leurs carrés pourront être immédiatement exprimées en séries convergentes, à l'aide des formules

$$(266) \qquad z_1 + z_2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n a_2^n} \frac{1}{1.2\ldots(2n-1)} \frac{\partial^{2n-1}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m)^n}{\partial z^{2n-1}},$$

(267) $$z_1^2+z_2^2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n a_2^n} \frac{2}{1.2\ldots(2n-1)} \frac{\partial^{2n-1}\left\{\varepsilon\left(a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+\cdots+a_{m-1}\varepsilon^{m-1}+\varepsilon^m\right)^n\right\}}{\partial\varepsilon^{2n-1}},$$

que l'on déduit des formules (122), (120), en y remplaçant la fonction $\varpi(z)$ par le rapport

(268) $$\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_{m-1}z^{m-1}+z^m}{a_2z^2},$$

et dans lequel ε désigne un nombre infiniment petit que l'on doit réduire à zéro, après les différentiations. Ajoutons que, si l'on se borne à calculer les n premiers termes des deux sommes qui constituent les seconds membres des formules (266), (267), l'erreur commise ne surpassera pas, à l'égard de la première somme, la plus petite des valeurs que reçoivent les expressions (120), quand on y pose $c=2\pi R$, c'est à dire, la plus petite des quantités

(269) $$RM^n\left(\frac{1}{1-M}\right), \qquad R\frac{M^n}{n(1-M)},$$

la valeur de M étant

(270) $$M = \Lambda\frac{a_0+a_1\bar z+a_2\bar z^2+\cdots+a_{m-1}\bar z^{m-1}+\bar z^m}{a_2\bar z^2},$$

et, à l'égard de la seconde somme, la plus petite des valeurs que prennent les expressions (114), quand on y pose $c=2\pi R$, $N=\Lambda(2\pi)=2\pi$, c'est à dire, la plus petite des quantités

(271) $$2\pi R^2M^n\left(\frac{1}{1-M}\right), \qquad 2\pi R^2\frac{M^n}{n(1-M)}.$$

Par la même raison, les erreurs dont il s'agit ne surpasseront point les valeurs que reçoivent les expressions (270), (271), quand on attribue à M la valeur déterminée par la formule

(272) $$M = \frac{A_0+A_1R+A_2R^2+\cdots+A_{m-1}R^{m-1}+R^m}{A_2R^2}.$$

Après avoir calculé, à l'aide des équations (266), (267), les sommes z_1+z_2, $z_1^2+z_2^2$, on déterminera sans peine la valeur du produit $z_1 z_2$ par la moyen de la formule

$$z_1 z_2 = \frac{(z_1+z_2)^2 - (z_1^2+z_2^2)}{2}. \tag{270}$$

On connaîtra donc alors les coefficients de l'équation du second degré

$$z^2 - (z_1+z_2)z + z_1 z_2 = 0, \tag{271}$$

dont la résolution fournira immédiatement les valeurs des racines z_1, z_2. Observons d'ailleurs qu'on pourrait déterminer immédiatement la valeur de la différence $z_1 - z_2$ à l'aide de la formule

$$(z_1-z_2)^2 = 2(z_1^2+z_2^2) - (z_1+z_2)^2, \tag{275}$$

et calculer ensuite z_1, z_2 à l'aide des deux équations

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{z_1+z_2}{2} + \dfrac{z_1-z_2}{2}, \\ z_2 = \dfrac{z_1+z_2}{2} - \dfrac{z_1-z_2}{2}. \end{cases} \tag{276}$$

Pourvu que les formules (266), (267) subsistent, il suffit que la plus petite des valeurs de π déduites de la formule (270), c'est-à-dire, le module principal de la fonction (268), soit inférieur à l'unité. Alors cette, quand l'unité désignera la valeur minimum du rapport qui forme le second membre de la formule (272), c'est-à-dire, la valeur correspondante à la racine positive unique de l'équation

$$\frac{A_0}{R} + A_1 = A_0 R^2 + 2A_2 R^3 + \dots + (m-2)A_{m-2}R^{m-2} + m-2)R^{m-1}, \tag{277}$$

on peut se borner à prendre pour R la racine dont il s'agit.

Pour montrer une application des formules qui précèdent, considérons en particulier l'équation

$$z^6 + 10z^3 - 1 = 0. \tag{278}$$

Comme, dans cette équation, le coefficient 10 de z^3 surpasse la somme des valeurs numériques 1 et 1 des autres coefficients, on

peut affirmer que deux racines seulement z_1, z_2 offriront des modules inférieurs à l'unité. Pour déterminer ces racines à l'aide de séries convergentes, il suffira de recourir aux formules (266), (267), ou

$$(279)\quad \begin{cases} z_1+z_2 = \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \dfrac{2}{1.2\ldots(2n-1)2n}\left(\dfrac{1}{10}\right)^n \dfrac{\partial^{2n-1}(1-\varepsilon^5)^n}{\partial\varepsilon^{2n-1}}, \\ z_1^2+z_2^2 = \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \dfrac{4}{1.2\ldots(2n-1)2n}\left(\dfrac{1}{10}\right)^n \dfrac{\partial^{2n-1}\{\varepsilon(1-\varepsilon^5)^n\}}{\partial\varepsilon^{2n-1}}, \end{cases}$$

desquelles on tirera

$$(280)\quad \begin{cases} z_1+z_2 = -\left(\dfrac{1}{10}\right)^3 - \dfrac{7.6}{2.3}\left(\dfrac{1}{10}\right)^8 - \dfrac{12.11.10.9}{2.3.4.5}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{13} - \text{etc}\ldots, \\ z_1^2+z_2^2 = \dfrac{1}{10} + \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{10}\right)^6 + \dfrac{10.9.8}{2.3.4}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{11} + \text{etc}\ldots, \end{cases}$$

et par conséquent

$$(281)\quad \begin{cases} z_1+z_2 = -0,0010000700099\ldots, \\ z_1^2+z_2^2 = 0,1000025000 30\ldots\ldots. \end{cases}$$

On aura donc

$$(z_1-z_2)^2 = 2(z_1^2+z_2^2)-(z_1+z_2)^2 = 0,20000400060\ldots,$$

et, en supposant $z_1 < z_2$,

$$(282)\quad z_1-z_2 = -0,4472180682 84\ldots,$$

puis on conclurra des formules (281), (282), jointes aux formules (276),

$$(283)\quad \begin{cases} z_1 = -0,2235590306 37\ldots, \\ z_2 = +0,2236590376 46\ldots. \end{cases}$$

D'un autre côté, comme les formules (270), (272) donneront l'une et l'autre

$$M = \frac{1+R^5}{10R^2},$$

on pourra, dans les expressions (269), (271), prendre pour M et

pour R le module principal de la fonction

$$\frac{1-z^5}{10z^2},$$

et les valeurs correspondantes de R, c'est-à-dire, la racine positive unique de l'équation (277) ou

$$1 = 9R^5.$$

On trouvera ainsi

$$R = \sqrt[5]{\frac{1}{9}} = 0,8027\ldots, \qquad M = 0,2069\ldots.$$

Par suite les seconds membres des expressions (271), et, à plus forte raison, le second membre de l'expression (269) ne surpasseront pas le produit

$$(0,1625\ldots)\frac{(0,2069\ldots)^n}{n}. \tag{284}$$

Or les seconds membres des formules (284) sont les valeurs approchées que les équations (279) fournissent pour les quantités z_1+z_2, $z_1^2+z_2^2$, quand on néglige, dans les sommes indiquées par le signe Σ, les termes correspondants à $n=16$, et aussi que les suivants; et, lorsque, dans le produit (284), on pose $n=16$, ce produit devient

$$\frac{2,9\ldots}{(10)^{12}}.$$

Donc, dans le second membre de chacune des formules (281), et par suite dans le second membre de chacune des formules (280), la onzième chiffre décimal est encore exact.

Il est important d'observer que, si la fonction $f(z)$, algébrique ou transcendante, est le produit de plusieurs facteurs

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,$$

les formules (86) et (87) entraîneront non seulement l'équation

(88), mais encore la formule

$$(289)\qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\frac{\partial z}{\partial s}\,ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\,\frac{\partial z}{\partial s}\,ds + \int_{s_0}^{s_1} \frac{f_2'(z)}{f_2(z)}\,\frac{\partial z}{\partial s}\,ds + \text{etc.}\ldots.$$

Cela posé, concevons que, les variables réelles x, y et par suite la variable imaginaire $z = x + y\sqrt{-1}$ étant exprimées en fonction de l'arc s, on ait non seulement

$$(287)\qquad f(z) = \varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s),$$

mais encore

$$(288)\qquad \begin{cases} f_1(z) = \varphi_1(s) + \sqrt{-1}\,\chi_1(s), \\ f_2(z) = \varphi_2(s) + \sqrt{-1}\,\chi_2(s), \\ \text{etc.}\ldots. \end{cases}$$

$\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... $\chi_1(s)$ $\chi_2(s)$, ... désignant, aussi bien que $\varphi(s)$ et $\chi(s)$ des fonctions réelles de s. Soient d'ailleurs z_0 et z_1 les valeurs de z correspondantes à $s = s_0$ et $s = s_1$. On tirera de la formule (89) non seulement

$$(287)\qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\frac{\partial z}{\partial s}\,ds = l\{\pm f(z_1)\} - l\{\pm f(z_0)\} - \pi\sqrt{-1}\int_{s_0}^{s_1} \left(\!\!\left(\frac{\chi(s)}{\varphi(s)}\right)\!\!\right),$$

mais encore

$$(288)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{s_0}^{s_1} \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\,\frac{\partial z}{\partial s}\,ds = l\{\pm f_1(z_1)\} - l\{\pm f_1(z_0)\} - \pi\sqrt{-1}\int_{s_0}^{s_1} \left(\!\!\left(\frac{\chi_1(s)}{\varphi_1(s)}\right)\!\!\right), \\ \displaystyle\int_{s_0}^{s_1} \frac{f_2'(z)}{f_2(z)}\,\frac{\partial z}{\partial s}\,ds = l\{\pm f_2(z_1)\} - l\{\pm f_2(z_0)\} - \pi\sqrt{-1}\int_{s_0}^{s_1} \left(\!\!\left(\frac{\chi_2(s)}{\varphi_2(s)}\right)\!\!\right), \\ \text{etc.}\ldots. \end{cases}$$

et par suite l'équation (289) donnera

$$(289)\qquad l\{\pm f(z_1)\} - l\{\pm f(z_0)\} - \pi\sqrt{-1}\int_{s_0}^{s_1} \left(\!\!\left(\frac{\chi(s)}{\varphi(s)}\right)\!\!\right)$$
$$= l\{\pm f_1(z_1)\} + l\{\pm f_2(z_1)\} + \ldots - l\{\pm f_1(z_0)\} - l\{\pm f_2(z_0)\} - \ldots - \pi\sqrt{-1}\left\{\int_{s_0}^{s_1}\left(\!\!\left(\frac{\chi_1(s)}{\varphi_1(s)}\right)\!\!\right) + \int_{s_0}^{s_1}\left(\!\!\left(\frac{\chi_2(s)}{\varphi_2(s)}\right)\!\!\right) + \ldots\right\}.$$

D'autre part, en vertu de l'équation (86)

$$\mathfrak{L}(z_0) = \mathfrak{L}_1(z_0)\cdot\mathfrak{L}_2(z_0)\cdots, \tag{290}$$

et par suite

$$1[\pm\mathfrak{L}(z_0)] = 1[\pm\mathfrak{L}_1(z_0)] + 1[\pm\mathfrak{L}_2(z_0)] + \cdots, \tag{291}$$

pourvu que la somme

$$\text{arctang}\frac{\chi_1(s_0)}{\varphi_1(s_0)} + \text{arctang}\frac{\chi_2(s_0)}{\varphi_2(s_0)} + \cdots \tag{292}$$

reste comprise entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$. On trouvera de même

$$1[\pm\mathfrak{L}(z_1)] = 1[\pm\mathfrak{L}_1(z_1)] + 1[\pm\mathfrak{L}_2(z_1)] + \cdots, \tag{293}$$

pourvu que la somme

$$\text{arctang}\frac{\chi_1(s_1)}{\varphi_1(s_1)} + \text{arctang}\frac{\chi_2(s_1)}{\varphi_2(s_1)} + \cdots \tag{294}$$

soit encore comprise entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$. Donc si les sommes (292), (294) offrent des valeurs numériques inférieures à $\frac{1}{2}\pi$, l'équation (287) pourra être réduite à

$$\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\!\left(\frac{\chi(s)}{\varphi(s)}\right)\!\right) = \mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\!\left(\frac{\chi_1(s)}{\varphi_1(s)}\right)\!\right) + \mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\!\left(\frac{\chi_2(s)}{\varphi_2(s)}\right)\!\right) + \text{etc.} \tag{295}$$

Imaginons, pour fixer les idées que, la fonction $\mathfrak{L}(z)$ étant décomposée en deux parties $\mathfrak{N}(z)$, $\mathfrak{D}(z)$, on prenne

$$\mathfrak{L}_1(z) = \mathfrak{N}(z), \qquad \mathfrak{L}_2(z) = 1 + \frac{\mathfrak{D}(z)}{\mathfrak{N}(z)}.$$

Si les valeurs de $\mathfrak{N}(z)$ correspondantes à $i=z_0$ et à $i=z_1$ sont toutes deux réelles, on aura

$$\chi_1(s_0) = 0, \quad \chi_1(s_1) = 0,$$

et par suite chacune des sommes (292), (294), étant réduite à un seul terme, offrira une valeur numérique plus petite que $\frac{\pi}{2}$. Si d'ailleurs la condition (97) est remplie pour les valeurs de s renfermées entre les limites $s=s_0$, $s=s_1$, on aura

$$\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_2(s)}{\varphi_2(s)}\right)\right)=0,$$

et par conséquent la formule (295) donnera

$$\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi(s)}{\varphi(s)}\right)\right)=\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_1(s)}{\varphi_1(s)}\right)\right), \tag{296}$$

$\varphi_1(s)$, $\chi_1(s)$ étant des fonctions réelles de s déterminées par la formule

$$\Pi(z)=\varphi_1(s)+\sqrt{-1}\,\chi_1(s). \tag{297}$$

Si la condition (97) étant remplie pour les valeurs de s comprises entre les limites s_0, s_1, les valeurs de $\Pi(z)$ correspondantes à ces limites ne s'évanouissent pas de manière réelle, alors, en remplaçant

$$f(z)=\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s) \quad \text{par} \quad f(z)\sqrt{-1}=-\chi(s)+\sqrt{-1}\,\varphi(s),$$
$$\Pi(z)=\varphi_1(s)+\sqrt{-1}\,\chi_1(s) \quad \text{par} \quad \Pi(z)\sqrt{-1}=-\chi_1(s)+\sqrt{-1}\,\varphi_1(s),$$

et substituant aux fonctions réelles

$$\varphi(s),\ \chi(s),\ \varphi_1(s),\ \chi_1(s)$$

celles qui suivent

$$-\chi(s),\ \varphi(s),\ -\chi_1(s),\ \varphi_1(s),$$

on obtiendrait, au lieu de l'équation (296), cette autre formule

$$\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\varphi(s)}{\chi(s)}\right)\right)=\mathcal{J}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\varphi_1(s)}{\chi_1(s)}\right)\right). \tag{298}$$

Concevons maintenant que, $f(z)$ étant une fonction entière de z déterminée par l'équation (267), on pose

$$\Pi(z)=z^m \qquad \varpi(z)=a_{m-1}z^{m-1}+\ldots+a_1z+a_0. \tag{299}$$

le nombre p des racines qui appartient à la fois aux modules inférieurs à R et aux racines réelles positives sera représenté par la seconde membre de la formule (178), à laquelle on pourra prendre pour valeur de $\psi(x,y)$ telle quelconque de celles que four-

-mment les formules (488), (489), par conséquent à un quelconque des deux rapports

$$-\frac{X(s)}{Q(s)}, \qquad \frac{Q(s)}{X(s)}$$

D'ailleurs, si le module R surpasse la valeur positive unique de l'équation (286), la condition (97) se trouvera remplie pour tous les points situés sur la circonférence du cercle décrit de l'origine avec le rayon R, c'est à dire, pour tous les points correspondants aux coordonnées de la forme

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi.$$

Enfin il est clair que les deux de ces points qui seront situés sur l'axe des y correspondront des valeurs de z de la forme

$$z = -R\sqrt{-1}, \quad z = R\sqrt{-1},$$

par conséquent des valeurs réelles de z^m, ou des valeurs imaginaires de z^m sans partie réelle, suivant que m sera un nombre pair ou un nombre impair. Donc, en vertu des formules (296), (298), réunies à la formule (179), on aura si

$$\mu = -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\| \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \right\| + \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \left\| \frac{X(0,y)}{Q(0,y)} \right\| \tag{300}$$

si m est un nombre pair ; et

$$\mu = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\| \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right\| - \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \left\| \frac{Q(0,y)}{X(0,y)} \right\| \tag{301}$$

si m est un nombre impair. On trouvera, dans le premier cas,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\| \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \right\| = -m, \tag{302}$$

et dans le second

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\| \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \right\| = m. \tag{303}$$

Donc on aura, pour des valeurs paires de m

$$(304) \qquad \mu = \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \mathcal{J}_{-R}^{R} \left(\left(\frac{\chi(0,y)}{\varphi(0,y)} \right) \right),$$

et pour des valeurs impaires de m

$$(305) \qquad \mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \mathcal{J}_{-R}^{R} \left(\left(\frac{\varphi(0,y)}{\chi(0,y)} \right) \right).$$

Telles sont les formules qui, pour une équation algébrique de degré pair ou de degré impair, déterminent le nombre des racines dont la partie réelle est positive. La valeur de R, qui, dans ces mêmes formules doit surpasser la racine positive unique de l'équation (254), peut être, si l'on veut supposée infinie. On aura donc encore, pour des valeurs paires de m

$$(306) \qquad \mu = \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \mathcal{J}_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{\chi(0,y)}{\varphi(0,y)} \right) \right),$$

et pour des valeurs impaires de m

$$(307) \qquad \mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \mathcal{J}_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{\varphi(0,y)}{\chi(0,y)} \right) \right).$$

Dans ces diverses formules

$$\varphi(0,y), \quad \chi(0,y)$$

sont des fonctions réelles de y déterminées par l'équation

$$(308) \qquad f(y\sqrt{-1}) = \varphi(0,y) + \sqrt{-1}\,\chi(0,y).$$

Ajoutons que de la formule (197) on tirera

$$(309) \qquad \mathcal{J}_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{\chi(0,y)}{\varphi(0,y)} \right) \right) + \mathcal{J}_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{\varphi(0,y)}{\chi(0,y)} \right) \right) = \pm 1,$$

le double signe devant être réduit au signe + ou au signe −, suivant que le rapport

$$\frac{\varphi(0,y)}{\chi(0,y)}$$

sera positif ou négatif pour $y = \infty$.

A l'aide de raisonnements semblables à ceux qui précèdent, on pourrait encore déterminer facilement le nombre des racines de l'équation (248) dont la partie réelle est supérieure à une valeur donnée x_0 de la variable x. On verrait, comme on posant

$$z = x_0 + u$$

on établit entre les variables u et z une relation telle que la partie réelle de u devient positive ou négative, suivant que la partie réelle de z est supérieure ou inférieure à x_0, il est clair que, pour obtenir le nombre cherché, il suffira de remplacer, dans la formule (206) ou (207) les deux fonctions

$$\varphi(x, y), \quad \chi(x, y)$$

par les suivantes

$$\varphi(x_0, y), \quad \chi(x_0, y).$$

Donc le nombre μ des racines de l'équation (248) qui offrent des parties réelles supérieures à x_0 sera, pour des valeurs paires de m

$$\mu = \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\chi(x_0, y)}{\varphi(x_0, y)} \right\|, \tag{210}$$

et pour des valeurs impaires de m

$$\mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\varphi(x_0, y)}{\chi(x_0, y)} \right\|. \tag{211}$$

On aura d'ailleurs, quel que soit le nombre entier m,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\chi(x_0, y)}{\varphi(x_0, y)} \right\| + \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\varphi(x_0, y)}{\chi(x_0, y)} \right\| = \pm 1, \tag{212}$$

le double signe devant être réduit au signe + ou au signe −, suivant que le rapport

$$\frac{\varphi(x_0, y)}{\chi(x_0, y)}$$

devient positif ou négatif pour des valeurs infinies de y.

Pour montrer une application des formules que nous venons d'établir, considérons l'équation du 7e degré que M. Fourier a prise pour exemple dans la première partie de son traité d'analyse, savoir,

$$z^7 - 22z^5 - 52z^3 + 42z^2 - 52z + 6 = 0, \tag{313}$$

et proposons nous de trouver le nombre μ des racines qui offrent des parties réelles positives. Ce nombre, déduit des formules (307) et (309), sera

$$\mu = 3 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(y^6 + 2y^4 - 39y^2 + 5)}{(\!(42y^2 - 6)\!)}\,dy = 3 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(y^6 + 5)}{(\!(42y^2 - 6)\!)}\,dy = 4. \tag{314}$$

Donc quatre racines offriront des parties réelles positives, et les trois autres des parties réelles négatives. Parmi ces dernières se trouvera nécessairement une racine réelle négative. On pourrait de même à l'aide de la formule (311) déterminer le nombre des racines de l'équation (313) dont la partie réelle ne surpasse pas une valeur donnée de x.

En général, si la fonction $f(z)$ étant réelle et déterminée pour la formule (247), on nomme $f_n(x)$ le coefficient de y^n dans le développement de $f(x+y)$, autrement qu'on ait

$$f(x+y) = f(x) + yf_1(x) + y^2 f_2(x) + \cdots + y^{m-1} f_{m-1}(x) + y^m, \tag{315}$$

on en conclura

$$f(x+y\sqrt{-1}) = f(x) + y\sqrt{-1}\,f_1(x) - y^2 f_2(x) + \cdots + (y\sqrt{-1})^{m-1} f_{m-1}(x) + (y\sqrt{-1})^m. \tag{316}$$

Par suite on trouvera, pour des valeurs paires de m,

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = f(x) - y^2 f_2(x) + \cdots\cdots\cdots + (-1)^{\frac{m}{2}} y^m, \\ \chi(x,y) = y\left\{ f_1(x) - y^2 f_3(x) + \cdots - (-1)^{\frac{m}{2}} y^{m-2} f_{m-1}(x)\right\}, \end{cases} \tag{317}$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = f(x) - y^2 f_2(x) + \cdots\cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} y^{m-1} f_{m-1}(x), \\ \chi(x,y) = y\left\{ f_1(x) - y^2 f_3(x) + \cdots\cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} y^{m-1}\right\}. \end{cases} \tag{318}$$

cela posé, si l'on représente par

$$f,\ f_1,\ f_2,\ \ldots\ldots\ f_{m-1}$$

ce que deviennent les fonctions

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ldots\ f_{m-1}(x)$$

pour une valeur donnée de x, le nombre μ des racines qui offrent des parties réelles supérieures à la valeur dont il s'agit sera, en vertu des formules (310), (311), (312), pour des valeurs paires de m,

$$(319)\qquad \mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{f_{m-1}}{((y))} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\!\!\left(\frac{y^m - y^{m-2}f_{m-2} + y^{m-4}f_{m-4} - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}}f}{y\left(y^{m-2} - y^{m-4}f_{m-3} + \ldots\ldots - (-1)^{\frac{m}{2}}f_1\right)} \right)\!\!\right),$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$(320)\qquad \mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\!\!\left(\frac{y^{m-1}f_{m-1} - y^{m-3}f_{m-3} + \ldots\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}f}{y\left(y^{m-1} - y^{m-3}f_{m-2} + \ldots\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}f_1\right)} \right)\!\!\right).$$

Ensuite d'ailleurs réduira la formule (319) à

$$(321)\qquad \mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{f_{m-1}}{((y))} - \frac{1}{2}\int \frac{f}{((y))f_1} + \int_{0}^{\infty} \frac{y^{\frac{m}{2}} - y^{\frac{m}{2}-1}f_{m-2} + \ldots\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}}f}{\left(\!\!\left(y^{\frac{m}{2}-1}f_{m-1} - y^{\frac{m}{2}-2}f_{m-3} + \ldots - (-1)^{\frac{m}{2}}f_1 \right)\!\!\right)},$$

et la formule (320) à

$$(322)\qquad \mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{f}{((y))f_1} - \int_{0}^{\infty} \frac{y^{\frac{m-1}{2}}f_{m-1} - y^{\frac{m-3}{2}}f_{m-3} + \ldots\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}f}{\left(\!\!\left(y^{\frac{m-1}{2}} - y^{\frac{m-3}{2}}f_{m-2} + \ldots\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}f_1 \right)\!\!\right)}.$$

On conclura de ces diverses formules, en attribuant successivement à m les valeurs particulières $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, que le nombre μ des racines dont la partie réelle surpasse la valeur donnée de x, est, pour une équation du troisième degré,

$$(323)\qquad \mu = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{f}{((y))f_1} - \int_{0}^{\infty} \frac{yf_2 - f_1}{((y - f_1))},$$

pour une équation du 4e degré

$$\mu = 2 - \frac{1}{2}\mathcal{J}\frac{f_2}{((y))} - \frac{1}{2}\mathcal{J}\frac{f}{((y))f_1} + \mathcal{J}_0^{\infty}\frac{y^2 - yf_2 + f}{((yf_3 - f_1))}, \tag{224}$$

pour une équation du 5e degré

$$\mu = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\mathcal{J}\frac{f}{((y))f_1} - \mathcal{J}_0^{\infty}\frac{y^2 f_4 - yf_2 + f}{((y^2 - yf_3 + f_1))}, \tag{225}$$

pour une équation du 6e degré

$$\mu = 3 - \frac{1}{2}\mathcal{J}\frac{f_4}{((y))} - \frac{1}{2}\mathcal{J}\frac{f}{((y))f_1} + \mathcal{J}_0^{\infty}\frac{y^3 - y^2 f_4 + yf_2 - f}{((y^2 f_5 - yf_3 + f_1))}, \tag{226}$$

enfin pour une équation du 7e degré

$$\mu = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\mathcal{J}\frac{f}{((y))f_1} - \mathcal{J}_0^{\infty}\frac{y^3 f_6 - y^2 f_4 + yf_2 - f}{((y^3 - y^2 f_5 + yf_3 - f_1))}, \tag{227}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mu = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\mathcal{J}\frac{f}{((y))f_1} - \frac{1}{2}\mathcal{J}\frac{f_5 f_6 - f_4}{((y))} - \frac{1}{2}\cdot\mathcal{J}\frac{f_4 f_6 - f}{((y))f_1} + \mathcal{J}_0^{\infty}\frac{y^3 - y^2 f_5 + yf_3 - f_1}{((y^4(f_5 f_6 - f_4) - y(f_3 f_6 - f_2) + f_1 f_6 - f))}. \tag{228}$$

Si l'on veut appliquer la formule (228) à l'équation (210), on trouvera

$$f(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6,$$
$$f_1(x) = 7x^6 - 10x^4 - 9x^2 + 8x - 5,$$
$$f_2(x) = 42x^5 - 20x^3 - 9x + 4,$$
$$f_3(x) = 35x^4 - 12x^2 - 3$$
$$f_4(x) = 35x^3 - 10x$$
$$f_5(x) = 21x^2 - 2$$
$$f_6(x) = 7x,$$

On remarquera d'ailleurs que les diverses racines de l'équation (210), devant offrir des modules inférieurs à la racine positive unique de l'équation

(329) $$x^7 - 2x^5 - 3x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0,$$

et par conséquent au nombre 2 qui surpasse cette dernière racine, auront toutes des parties réelles comprises entre les limites $-2, +2$. Or, si l'on pose successivement

$$x = -1, \qquad x = 0, \qquad x = 1,$$

on tirera 1° de la formule (328), pour $x = -1$,

$$\mu = 5 - \int_0^\infty \frac{y^5 - 19y^3 + 12y + 25}{12\,((9y^2 - 8y - 15))} = 6,$$

2° de la formule (327), pour $x = 0$,

$$\mu = 4 - \int_0^\infty \frac{4y - 6}{((y^5 + 2y^3 - 3y + 5))} = 3 + \int_0^\infty \frac{y^2 + 5}{2((2y - 3))} = 4,$$

3° de la formule (328), pour $x = 1$,

$$\mu = 3 + \int_0^\infty \frac{y^3 - 19y^2 + 12y + 9}{4\,((27y^2 - 22y - 16))} = 2.$$

Donc l'équation (313) admettra une racine réelle négative renfermée entre les limites $-2, -1$, et deux dix autres racines dont l'une aura sa partie réelle négative comprise entre les limites $-1, 0$, dont l'autre aura sa partie réelle positive comprise entre les limites $0, 1$, enfin deux dont l'une aura sa partie réelle positive comprise entre les limites $1, 2$.

Revenons encore à l'équation (268), et supposons que le premier membre ou la fonction $f(z)$ étant décomposé en deux parties $\Pi(z)$, $\varpi(z)$, on désigne par $z = \alpha$ une des racines de l'équation

(100) $$\Pi(z) = 0$$

Si l'on fait $z = \alpha + u$, l'équation (268) deviendra

(330) $$\Pi(\alpha + u) + \varpi(\alpha + u) = 0.$$

Si d'ailleurs, pour un certain module V de la variable imaginaire u, la condition

(331) $$\Lambda \frac{\varpi(a+\bar{u})}{\Pi(a+\bar{u})} < 1$$

se trouve remplie, le nombre des racines qui rendront le module de la différence $z-a$ inférieur à V sera le même pour les équations (248) et (100). Cela posé, admettons que toutes les racines de l'équation (100), autres que a, rendent le module de la différence $z-a$ supérieur à V; une seule racine de l'équation (248) sera de la forme

$$a+u,$$

le module de u étant inférieur à V, et cette racine pourra être développée en série convergente par la formule

(332) $$z = a + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \mathcal{E}\left(\left(\frac{\varpi(a+u)}{\Pi(a+u)}\right)^n\right),$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif à la seule valeur $u=0$ de la variable u, ou ce qui revient au même par la formule

(333) $$z = a + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{\partial^{n-1}\left\{\frac{u\varpi(a+u)}{\Pi(a+u)}\right\}^n}{\partial u^{n-1}}.$$

Ajoutons que, si l'on exprime la variable u, en fonction d'une autre variable v, ensorte qu'on ait

(334) $$u = \mathcal{V},$$

$\mathcal{V}$ désignant une fonction de v, l'équation (332) pourra être remplacée par la suivante

(335) $$z = a + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n} \mathcal{E}\left(\left(\frac{\varpi(a+\mathcal{V})}{\Pi(a+\mathcal{V})}\right)^n \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial v}\right),$$

le signe $\mathcal{E}$ étant relatif à la seule valeur de v qu'on obtient en posant dans la formule (334) $u=0$.

Quant à l'erreur que l'on commettra, si dans les sommes que renferment les formules (332), (333), (335) on néglige le n^{me} terme et ceux qui le suivent, elle ne surpassera pas le produit

(226) $$V\frac{M^n}{n(1-M)},$$

la valeur de M étant

(227) $$M=\Lambda\frac{\Pi(a+\overline{n})}{\Pi\Lambda(a+\overline{n})}$$

Turin, ce 4 août 1832.

Post-Scriptum. En appliquant à l'équation (215) les formules (227), (228), nous en avons conclu que cette équation admettait une racine négative comprise entre les limites $-2,-1$, et que deux autres racines deux seulement offraient des valeurs réelles comprises, l'une entre les limites $-1,0$, l'autre entre les limites $0,1$, l'autre entre les limites $1,2$. Si l'on voulait savoir quelles sont parmi ces dernières racines celles qui restent réelles, il suffirait de recourir à la formule (189). En effet, en vertu de cette formule, le nombre m des racines réelles de l'équation (215) inférieures à un nombre donné X sera

(228) $$m=\int_{-\infty}^{X}\frac{7x^6-10x^4-9x^2+8x-5}{((x^7-2x^5-5x^3+4x^2-5x+6))},$$

ou, ce qui revient au même, en égard à la formule (202),

(229) $$m=\int_{-\infty}^{X}\frac{62x^4-70x^3+123x^2-165x+10}{((629x^3-1266x^2+2850x-2955))}+1$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{7X^6-10X^4-9X^2+8X-5}{X^7-2X^5-5X^3+4X^2-5X+6}\frac{1}{((x))}+\frac{1}{2}\int\frac{2X^5+6X^3-10X^2-15X-21}{7X^6-10X^4-9X^2+8X-5}\frac{1}{((x))}$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{62X^4-70X^3+123X^2-165X+10}{2X^5+6X^3-10X^2-15X-21}\frac{1}{((x))}-\frac{1}{2}\int\frac{629X^3-1266X^2+2850X-2955}{62X^4-70X^3+123X^2-165X+10}\frac{1}{((x))}.$$

D'ailleurs, l'équation

(240) $$629x^3-1266x^2+2850x-2955=0$$

n'a qu'une seule racine réelle, attendu que les deux racines de la

dérivée dont imaginaires ; et cette racine réelle, inférieure au nombre 2, surpasse le rapport $\frac{4}{5}$ dont la substitution à la place de x rend le premier membre négatif. Or, comme cette même substitution rend positifs les deux binômes

$$62x^4 - 70x^3, \quad 120x^2 - 160x,$$

il en résulte qu'on aura

$$\int_{-\infty}^{X} \frac{62x^4 - 70x^3 + 120x^2 - 160x + 10}{(62x^3 - 126x^2 + 180x - 190)} = 0, \tag{341}$$

si le nombre X est inférieur à la racine positive de l'équation (340), et

$$\int_{-\infty}^{X} \frac{62x^4 - 70x^3 + 120x^2 - 160x + 10}{(62x^3 - 126x^2 + 180x - 190)} = 1, \tag{342}$$

dans le cas contraire. Donc, si, dans la formule (299), on pose successivement $X = 1$, $X = 2$, on en conclura

$$\text{pour } X = 1, \quad m = 1, \quad \text{et pour } X = 2, \quad m = 3.$$

Donc l'équation (343) admet seulement trois racines réelles, savoir, une racine négative comprise entre les limites -2, -1, et deux racines positives comprises entre les limites 1 et 2, ou même entre les limites 1 et $1,55$, attendu que le polynome

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \tag{343}$$

qui reste positif pour $x = 1$ et $x = 2$, devient négatif pour $x = \frac{1+2}{2} = 1,5$, reprend une valeur positive pour $x = 1,6$, et même pour $x = \frac{1,5 + 1,6}{2} = 1,55$. Cela posé, comme en désignant par a l'une des trois quantités

$$-2 \; ; \quad 1 \; ; \quad 1,55$$

et prenant $\Pi(x) = f(a)$, $\omega(x) = f(x) - f(a)$, il suffira d'attribuer le module $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{10}$ à la variable $u = x - a$, pour vérifier la condition (333), les trois racines réelles de l'équation (343) pourront être développées en séries convergentes à l'aide de la formule (332) ou

$$(344) \qquad x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f''(a)}{2f'(a)}\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 - \left\{2\left(\frac{f''(a)}{2f'(a)}\right)^2 - \frac{f'''(a)}{6f'(a)}\right\}\left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^3 - \text{etc.} \ldots$$

De laquelle on tirera, pour $a = -2$, $x = -1,9625\ldots$; pour $a = 1$, $x = 1,107\ldots$; pour $a = 1,55$, $x = 1,5020\ldots$